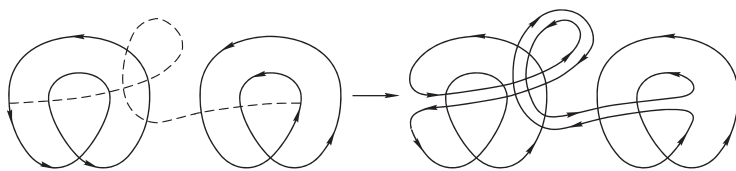
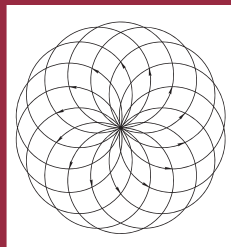
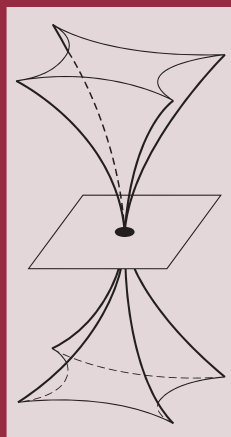
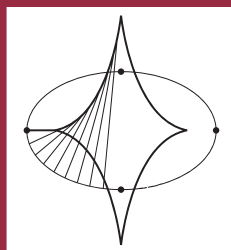


**В. И. Арнольд**

**Волновые  
фронты  
и топология  
кривых**



**80 лет  
со дня рождения**

**В. И. АРНОЛЬДА**

В. И. Арнольд

# Волновые фронты и топология кривых

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2018

УДК 514.75  
ББК 22.16  
А84

Арнольд В. И.  
Волновые фронты и топология кривых  
М.: МЦНМО, 2018  
116 с.  
ISBN 978-5-4439-3245-3

Одномерные каустики и волновые фронты являются специальными классами плоских кривых. Исследование их особенностей привело к созданию новых глав топологии. В этой книге, начиная с простых примеров, рассматривается глобальная теория особенностей иммерсий гладких многообразий и волновых фронтов.

Книга рассчитана на студентов физико-математических специальностей.

Подготовлено на основе книги:  
*Арнольд В. И. Основы алгебраической геометрии. Волновые фронты и топология кривых.* — М.: МЦНМО, 2018. — 116 с.: ил.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,  
тел. (499)–241–08–04.  
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3245-3

© Арнольд Э. А. (насл.), 2018.  
© МЦНМО, 2018.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

## Часть 1 Инварианты и дискриминанты плоских кривых и фронтов

Глава 1. Плоские кривые . . . . .	9
§ 1.1. Три базисных инварианта . . . . .	9
§ 1.2. Свойства базисных инвариантов . . . . .	13
§ 1.3. Вычисление базисных инвариантов . . . . .	15
§ 1.4. Экстремальные кривые и древоподобные кривые . . . . .	17
§ 1.5. Нумерология . . . . .	22
§ 1.6. Кобордизмы . . . . .	25
§ 1.7. Длинные кривые . . . . .	27
Глава 2. Лежандровы узлы . . . . .	30
§ 2.1. От плоских кривых к лежандровым узлам . . . . .	30
§ 2.2. Пространство лежандровых кривых . . . . .	32
§ 2.3. Базисный инвариант $J^+$ . . . . .	35
§ 2.4. Лежандровы коэффициенты зацепления . . . . .	37
§ 2.5. Вычисление коэффициентов зацепления . . . . .	39

## Часть 2 Симплектическая и контактная топология каустик и волновых фронтов

Глава 3. Особенности каустик и теория Штурма . . . . .	47
§ 3.1. Теоремы о четырех точках возврата и последняя геометрическая теорема Якоби . . . . .	47
§ 3.2. Теорема Гурвица—Келлога—Табачникова типа Штурма . . . . .	56
§ 3.3. Тригонометрические аппроксимации . . . . .	63
§ 3.4. Лагранжевы пересечения в симплектической топологии . . . . .	65
§ 3.5. Лежандровы зацепления в контактной топологии . . . . .	70
§ 3.6. Лагранжев коллапс и точки возврата каустик . . . . .	73

<b>Глава 4. Особенности волновых фронтов и теорема о теннисном мяче</b> . . . . .	<b>81</b>
§ 4.1. Лежандров коллапс и выворачивание фронтов . . . . .	81
§ 4.2. Доказательство теоремы о теннисном мяче . . . . .	85
§ 4.3. Пространственные кривые, их точки уплощения и теорема Мёбиуса . . . . .	90
§ 4.4. Вершины выпуклых пространственных кривых . . . . .	94
§ 4.5. Приложения в теории экстагических точек плоских кривых . . . . .	101
§ 4.6. Многомерные обобщения теории Штурма . . . . .	102
Литература . . . . .	109

# Предисловие

Чтобы увидеть предмет этой книги,  
проще всего перелистать ее рисунки.

В 1993 г. в университете Ратгерс (США) праздновалось 80-летие И. М. Гельфанда, и я был приглашен прочесть четыре лекции. Во время четвертой Израиль Моисеевич попросил меня записать эти лекции по-английски (что я и сделал в тот же вечер, так как на следующий день должен был возвращаться в Бостон в МГТ, где я работал в том семестре). Через год эти лекции (за инициативу написания которых я благодарю И. М. Гельфанда) были изданы Американским математическим обществом в виде книжки «Топологические инварианты плоских кривых и каустик» (том 5 серии «Университетские лекции»).

Новая область математики, начатая этой книгой, была затем продолжена в длинном ряде работ Ф. Аикарди, О. Виро, М. Поляка, Д. Панова, С. Анисова, А. Шумаковича, С. Табачникова, Б. Шалиро, М. Шапиро, В. Горюнова, В. Закалюкина, Г. Михалкина, В. Васильева, Д. Фукса, С. Гусейн-Заде, С. Натанзона, М. Казаряна, Э. Феррана, Ю. Чеканова, П. Пушкаря, Р. Урибе, М. Гарэя, В. Седых и многих других. Теперь возникла уже целая область, пограничная между дифференциальной, симплектической и контактной геометрией и топологией, — глобальная теория особенностей иммерсий гладких многообразий и волновых фронтов.

Хотя первые результаты в этом направлении обнаружили уже Штурм, Якоби и Мёбиус, сегодня эта наука выглядит совершенно иначе, особенно благодаря обнаруженным В. Васильевым и М. Концевичем связям изученных здесь инвариантов с квантовой теорией поля. Например, классическая теорема Штурма и Гурвица о нулях рядов Фурье оказалась удивительным инфинитезимальным вариантом теорем симплектической и контактной топологии, обобщающих неравенства теории Морса на старшие производные. В этой области много еще остается сделать; имеется и ряд давних гипотез, восходящих порой даже к Якоби.

В настоящем издании использованы идеи, изложенные ранее в упомянутых выше лекциях 1993 г., а также в статье «Топологические проблемы теории распространения волн» (*Успехи матем. наук.* 1996. Т. 51(1). С. 3–50). При этом, естественно, прокомментированы основные появившиеся с тех пор результаты. Большую работу по подготовке настоящего издания провел Максим Казарян, которому я очень благодарен за это.

*В. И. Арнольд*  
Москва, декабрь 2001

**Часть 1**

**Инварианты и дискриминанты  
плоских кривых и фронтов**



Подход теории особенностей к топологической классификации объектов произвольной природы состоит в следующей стратегии, восходящей к Пуанкаре. Нужно рассмотреть бесконечномерное пространство изучаемых объектов, включая в него как объекты общего положения, так и вырожденные. Вырожденные объекты образуют гиперповерхность (особое подмногообразие коразмерности один) в этом пространстве. Эта *дискриминантная поверхность* разбивает бесконечномерное пространство  $F$  на части. Каждая компонента связности дополнения к дискриминантной поверхности  $\Sigma$  состоит из невырожденных объектов одинакового топологического типа (имеющих одни и те же дискретные инварианты).

Инварианты — локально постоянные функции на дополнении к дискриминантной поверхности. Они образуют кольцо  $H^0(F \setminus \Sigma)$  нульмерных классов когомологий дополнения. Когомологии дополнения к дискриминантной гиперповерхности можно изучать при помощи бесконечномерного варианта двойственности Александра (при условии, что само бесконечномерное пространство  $F$  гомологически устроено достаточно просто). А именно, можно использовать естественную стратификацию дискриминантной поверхности в соответствии с различными особенностями исследуемых объектов и получить информацию о (ко)гомологиях дискриминантной поверхности, а затем, используя двойственность, получить из нее информацию о (ко)гомологиях дополнения.

Этот общий подход был с успехом применен в недавней работе Васильева об инвариантах узлов. Тем не менее, потенциальные приложения этого метода ко многим задачам топологии пространств отображений и многообразий в вещественной и комплексной геометрии все еще ждут своих исследователей.

# Глава 1

## Плоские кривые

В этой главе я привожу простейшие результаты, полученные применением описанного выше общего подхода к случаю плоских кривых. Комбинаторика плоских кривых гораздо более сложная, чем в теории узлов (теорию узлов можно рассматривать как упрощенную «коммутативную» версию комбинаторики плоских кривых, и, возможно, она даже вкладывается в теорию плоских кривых). Подробности и доказательства содержатся в [37] и [9].

### § 1.1. Три базисных инварианта

В дальнейшем под кривой мы понимаем иммерсию окружности в плоскость. Чтобы объяснить природу основных результатов, я начну с примера.

На рис. 1.1 изображены две кривые. Они принадлежат одной и той же компоненте пространства иммерсий. Таким образом, существует однопараметрическое семейство иммерсий, соединяющее эти две иммерсии общего положения (найдите его!).

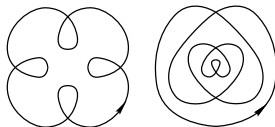


Рис. 1.1. Два представителя одной компоненты пространства иммерсий

Очевидно, что для некоторых значений параметра иммерсии, принадлежащие этому пути, не находятся в общем положении. Если путь — общего положения, то для отдельных значений параметра может произойти три типа событий (рис. 1.2): *тройные самопересечения* иммерсированной кривой и *самокасания* двух видов — *попутные самокасания* (две касающиеся ветви кривой ориентированы одним и тем же касательным вектором) и *противопутные*.

**Теорема.** *В типичном пути, соединяющем две кривые, изображенные на рис. 1.1, число моментов тройного самопересечения не меньше шести. Число попутных самокасаний и число противоположных самокасаний также не меньше шести.*

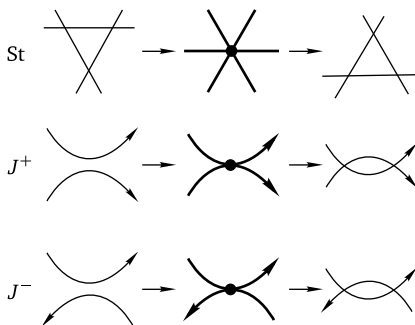


Рис. 1.2. Перестройки тройного самопересечения и самокасания

В действительности все три числа в точности равны шести, если все события учитывать с подходящими знаками.

Для самокасаний определение знаков простое. *Попутное* самокасание, происходящее в однопараметрическом семействе иммерсий, называется *положительным*, если количество точек самопересечений кривой *увеличивается*. *Противопутное* самокасание называется *положительным*, если количество точек самопересечения кривой *уменьшается*.

Для точки тройного самопересечения правило, задающее знак, несколько сложнее. Этот знак определяется из подробного изучения топологии особенностей коразмерности один на дискриминантной гиперповерхности. Это изучение приводит к выводу, что дискриминант тройного самопересечения коориентирован следующим выбором его положительной стороны в пространстве иммерсий.

В однопараметрических семействах общего положения при перестройке тройного самопересечения на кривой имеется *исчезающий треугольник*: умирающий треугольник, существующий до перестройки, и родившийся треугольник, существующий после нее (рис. 1.3). Правило коориентации приписывает этим треугольникам знаки, как показано на рис. 1.3.

Пересечение *положительно*, если родившийся треугольник *положительный* (а умирающий соответственно *отрицательный*).

Теперь я определяю знак треугольника. Зафиксируем ориентацию окружности, иммерсия которой имеет тройную точку самопересечения. Эта точка имеет три прообраза на окружности, и их циклический порядок корректно определен. Следовательно, мы получаем корректно определенную ориентацию исчезающего треугольника (задаваемую циклическим порядком, в котором кривая проходит через стороны треугольника). Кроме того, каждая сторона имеет свое направление (поскольку окружность ориентирована). Это на-

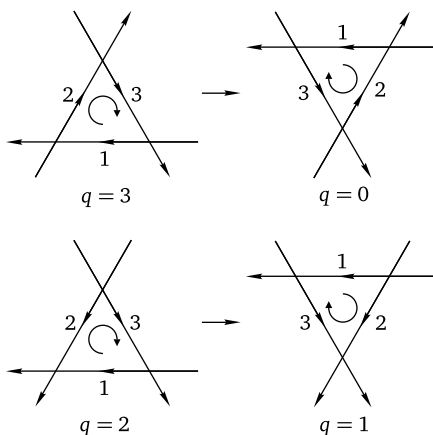


Рис. 1.3. Исчезающие треугольники и их знаки

правление может совпадать с направлением, заданным циклическим порядком сторон, или может быть противоположно ему. Обозначим через  $q$  количество сторон в исчезающем треугольнике, направление которых *совпадает* с направлением, задаваемым циклическим порядком.

**Определение.** *Знак треугольника* равен  $(-1)^q$ .

**Замечание.** Наше правило знаков совпадает с более общим правилом *ориентации графа*, введенным М. Концевичем в [72] и примененным к случаю треугольника. Ориентация Концевича графа  $\Gamma$  — это ориентация пространства  $\mathbb{R}^a \oplus H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ , где базис пространства  $\mathbb{R}^a$  образован ребрами графа. Понимание этого совпадения может быть полезно при изучении дальнейших вырождений иммерсий.

**Пример.** Умиравший треугольник на рис. 1.3 сверху — отрицательный, а родившийся — положительный. Следовательно, пересечение дискриминанта положительно.

**Замечание.** Определение знака не зависит от выбора ориентации кривой. Действительно, обращение ориентации изменяет как циклический порядок, так и направления сторон. Кроме того, положительность перестройки тройного самопересечения корректно определена даже для неориентированной плоскости.

**Теорема.** *Приведенное выше правило задает коориентацию дискриминантной гиперповерхности.*

**Замечание.** Каждую из трех дискриминантных гиперповерхностей (соответствующую тройным самопересечениям, попутным и противоположным самокасаниям) можно рассматривать как «бес-

конечномерную алгебраическую гиперповерхность». Эти гиперповерхности не являются неприводимыми. Каждая из них состоит из счетного числа неприводимых компонент. Каждая из компонент коориентирована приведенными выше правилами. Мы покажем, что инварианты, соответствующие объединению всех компонент дискриминанта тройного самопересечения (и аналогично для дискриминантов самокасаний обоих типов), обладают замечательными свойствами и в некотором смысле являются наиболее фундаментальными инвариантами иммерсированных кривых.

Чтобы полностью задать инварианты, нам нужно зафиксировать их значение в некоторых точках, по одной для каждой компоненты связности в пространстве иммерсий.

Эти компоненты связности описаны Уитни в 1937 г.

**Теорема (Уитни, [93]).** *Пространство иммерсий фиксированного индекса окружности в плоскость линейно связно.*

Индексом иммерсии ориентированной кривой в ориентированную плоскость называется число оборотов касательного вектора вдоль этой кривой (степень гауссова отображения, сопоставляющего точке окружности направление образа касательного вектора в этой точке, ориентирующего окружность, под действием производного отображения иммерсии).

Стандартные представители всех компонент изображены на рис. 1.4 (знак индекса зависит от выбора ориентации кривой и плоскости, и он не показан на рис. 1.4).

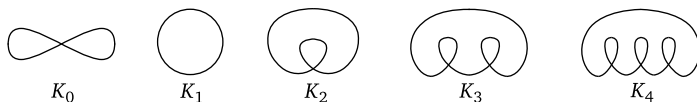


Рис. 1.4. Стандартные кривые  $K_i$  индекса  $i$

**Определение.** *Базисные инварианты  $St$  (странность),  $J^+$ ,  $J^-$  плоской иммерсии кривой определяются следующим выбором скачков  $a$  и их значений при положительном пересечении коориентированных дискриминантов и значениями на стандартных кривых, как показано на рис. 1.5.*

**Замечание.** Этот выбор знаков на первый взгляд не выглядит естественным. Необходимость такого выбора объясняется приведенными ниже теоремами.

**Теорема.** *Инварианты  $St$ ,  $J^+$ ,  $J^-$  иммерсий окружности в плоскость существуют и однозначно определяются нормировочными условиями, показанными на рис. 1.5.*

	$a(\text{X})$	$a(\text{Y})$	$a(\text{Z})$	$\infty$	$\bigcirc$	$\text{loop}_1$	$\text{loop}_2$	$\text{loop}_3$	...
St	1	0	0	0	0	1	2	3	...
$J^+$	0	2	0	0	0	-2	-4	-6	...
$J^-$	0	0	-2	-1	0	-3	-6	-9	...

Рис. 1.5. Нормировочные константы, определяющие базисные инварианты

**Пример.** Значения базисных инвариантов для всех иммерсий с двумя точками самопересечения приведены на рис. 1.6.

	$\infty$	$\text{loop}_1$	$\text{loop}_2$	$\text{loop}_3$	$\text{loop}_4$
ind	1	1	1	3	3
St	0	0	1	2	3
$J^+$	0	0	-2	-4	-6
$J^-$	-2	-2	-4	-6	-9

Рис. 1.6. Кривые с двумя точками самопересечения и их базисные инварианты

Согласно нашему выбору скачка инвариантов  $J^\pm$ , равного  $\pm 2$ , изменение инварианта  $J^+$  равно изменению числа точек самопересечения. Для инварианта  $J^-$  изменение его величины противоположно изменению числа точек самопересечения. Поэтому разность этих инвариантов  $J^+ - J^- = n$  всегда равна числу точек самопересечения кривой.

### §1.2. Свойства базисных инвариантов

**Теорема.** Все три инварианта аддитивны по отношению к связанной сумме иммерсий.

Связная сумма двух иммерсированных кривых, одна из которых расположена в левой полуплоскости, а другая — в правой, определяется, как на рис. 1.7, посредством вложенного соединяющего моста между ними, расположенного в дополнении к образам исходных иммерсий.

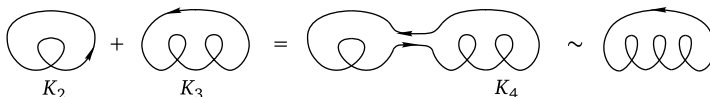


Рис. 1.7. Связная сумма двух иммерсий

Это суммирование *не* является операцией на классах иммерсий, поскольку мост можно выбирать различными способами. Однако базисные инварианты аддитивны по отношению к *любому* выбору моста (если он существует, что бывает не всегда:  $K_1 + K_{-1}$  не определено).

**Пример.** Кривые  $K_i$ , изображенные на рис. 1.4, являются связными суммами кривой  $K_2$  (при подходящем выборе ориентаций):

$$\begin{aligned} K_{i+1} &= iK_2 & (i > 0), \\ K_{i+1} + K_{j+1} &= K_{i+j+1} & (i, j \geq 0). \end{aligned}$$

**Замечание.** Можно рассмотреть абелеву группу аддитивных инвариантов и назвать двойственную группу  $K$ -теорией. Некоторые алгебраические структуры, осуществляющие этот подход, представлены ниже.

**Определение.** *Странная сумма* двух иммерсий окружности (одна из которых расположена в левой полуплоскости, а другая — в правой) задается *иммерсией* трансверсального отрезка, соединяющего их, как изображено на рис. 1.8.

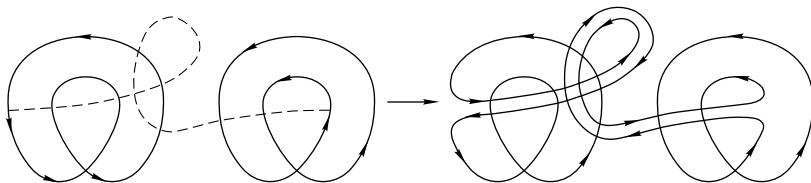


Рис. 1.8. Странная сумма двух иммерсий

**Замечание.** Странное суммирование также не является операцией. Всякие две иммерсии имеют *много* странных сумм (в отличие от обычной связной суммы, которая может вообще не существовать).

**Теорема.** *Инвариант странности аддитивен по отношению к странному суммированию иммерсий.*

**Замечание.** Группу, двойственную абелевой группе странно аддитивных инвариантов (скажем, для иммерсий без точек тройного самопересечения), можно рассматривать как «странную  $K$ » для таких иммерсий.

Базисные инварианты  $J^\pm$  не являются странно аддитивными.

**Теорема.** *Базисные инварианты  $J^+$ ,  $J^-$  и  $St$  не зависят от выбора ориентации отображаемой окружности и плоскости.*

Сформулируем теперь аксиоматические определения базисных инвариантов, объясняющие выбор нормировочных констант на рис. 1.5.

**Определение.** Инвариант иммерсии без точек тройного самопересечения называется *локальным*, если его увеличение в момент прохождения тройного самопересечения зависит только от поведения семейства иммерсий в окрестностях трех точек окружности, которые отображаются иммерсией в точку тройного самопересечения.

**Теорема.** *Существует, и притом ровно один, инвариант (St) иммерсий окружности без точек тройного самопересечения, который удовлетворяет следующим трем аксиомам:*

- (1) *локальность;*
- (2) *аддитивность;*
- (3) *независимость от выбора ориентации окружности.*

*Свойства (1)–(3) задают инвариант однозначно с точностью до множителя, который фиксируется дополнительным условием*

- (4)  $\text{St}(K_2) = 1$ .

**Замечание.** Странная аддитивность не включена в аксиомы, она следует из аксиом (1)–(3). Инвариантность относительно обращения ориентации плоскости также не включена в аксиомы: она вытекает из аксиом (1)–(3).

Можно заменить аксиому (3) условием инвариантности при отражениях плоскости. Из этого условия аксиома (3) вытекает.

Аналогичные теоремы справедливы и для остальных базисных инвариантов (конечно, прохождение тройного самопересечения в первой аксиоме нужно заменить на попутное самокасание для  $J^+$  и противоположное для  $J^-$ ).

## § 1.3. Вычисление базисных инвариантов

Эти инварианты настолько фундаментальны, что для них должны существовать простые прямые определения в терминах самой иммерсированной кривой, а не в терминах пространства иммерсий (возможно, в духе формул Концевича, выражающих инварианты Васильева как итерированные интегралы).

Хорошие интегральные выражения для базисных инвариантов не известны, но некоторые формулы (решающие задачу в принципе) представлены ниже. Я выражу инварианты через числа вращения некоторых векторнозначных функций. (Эти числа вращения можно записать как интегралы, например, формы  $\frac{dz}{z}$ .)

Эти формулы тесно связаны с формулой Уитни для индекса плоской кривой с  $n$  точками самопересечения:

$$\text{ind} = \sum \varepsilon_i \pm 1,$$



где суммирование производится по всем  $n$  точкам самопересечения.  $\varepsilon_i$  — некоторый знак, связанный с каждой точкой самопересечения, а знак  $\pm$  зависит от ориентации кривой и плоскости.

**Следствие.** *Справедливо неравенство  $\text{ind} \leq n + 1$ .*

**Пример.** Обе кривые на рис. 1.1 имеют по  $n = 4$  точки самопересечения и максимальное значение индекса  $\text{ind} = 5$ .

Я оставляю читателю удовольствие самостоятельно вывести правила, задающие все знаки. Насколько мне известно, эта формула, доказанная в 1937 г., до сих пор не переработана современными математиками, и ее многомерные обобщения еще предстоит открыть (статья [76] содержит один из первых результатов в этом направлении).

Правило Уитни для знаков точек самопересечения естественно возникает в приведенных ниже формулах для комбинаций инвариантов:

$$I^\pm = J^\pm + 3 \text{St}.$$

Выберем такого представителя иммерсии общего положения кривой в евклидову плоскость, что все самопересечения ортогональны (или, если не хочется менять иммерсию, можно выбрать подходящую риманову метрику).

Выберем такой порядок (1, 2) ветвей кривой, выходящих из точек самопересечения, что репер (1, 2) положительно ориентирует плоскость (см. рис. 1.9).

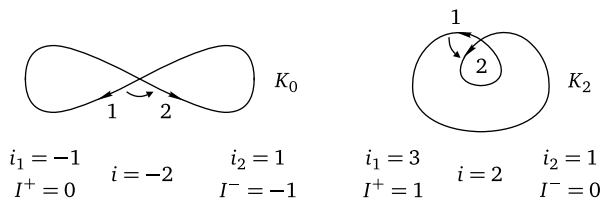


Рис. 1.9. Положительные оснащения, полуиндексы и индексы в точках самопересечения

**Пример.** Полуиндексом  $i_1$  (соответственно  $i_2$ ) точки самопересечения называется угол, на который поворачивается радиус-вектор, соединяющий эту точку с точкой, движущейся вдоль ветви 1 (соответственно 2) кривой из точки самопересечения в себя, деленный на  $\frac{\pi}{2}$  (т. е. измеренный в четвертях полного оборота).

Индексом точки самопересечения называется разность  $i = i_1 - i_2$  (рис. 1.9).

Полуиндексы *зависят* от выбора ориентаций кривой и плоскости, в то время как индекс *не* зависит от выбора ориентаций.

**Теорема. Комбинации**

$$I^{\pm} = J^{\pm} + 3St$$

базисных инвариантов общей иммерсии равны сумме подправленных индексов  $n$  точек самопересечения:

$$I^{\pm} = \frac{\sum(i \pm 2)}{4}.$$

Ниже я приведу независимую формулу для  $J^+$  (описывающую этот инвариант как обобщенный индекс Беннекена). Эта формула вместе с приведенными выше дает явные (хотя и довольно громоздкие) выражения для всех трех базисных инвариантов. В некоторых частных случаях имеются более красивые простые формулы.

## §1.4. Экстремальные кривые и древоподобные кривые

**Определение.** Общая иммерсия окружности в плоскость с  $n$  двойными точками называется *экстремальной*, если ее индекс равен  $n + 1$  (т. е. максимально возможному значению, разрешенному по теореме Уитни).

**Пример.** Обе кривые на рис. 1.1 и последние две кривые на рис. 1.6 экстремальные.

Экстремальные кривые имеют простую классификацию: они занумерованы плоскими корневыми деревьями. Инварианты экстремальных кривых легко выражаются через эти деревья.

**Определение.** Гауссовой диаграммой общей иммерсии окружности в плоскость называется объединение хорд в диске, ограниченном этой окружностью, соединяющих прообразы точек самопересечения (по одной хорде для каждой точки самопересечения).

**Пример.** Гауссова диаграмма для каждой из пяти кривых с двумя точками самопересечения состоит из двух непересекающихся хорд. Поэтому пара *пересекающихся* хорд не является гауссовой диаграммой ни для какой иммерсии общего положения окружности в плоскость.

**Определение.** Древоподобной кривой называется иммерсия, для которой гауссова диаграмма состоит из непересекающихся хорд. Иными словами, кривая древоподобна, если каждая из ее точек самопересечения разбивает ее на две несвязные петли.

**Пример.** Обе кривые, изображенные на рис. 1.1, древоподобны. Всякая экстремальная кривая древоподобна.

Выберем по точке в каждой из  $n + 1$  областей, на которые  $n$  пересекающихся хорд гауссовой диаграммы древоподобной кривой разбивают диск. Соединим отрезком точки, принадлежащие областям, разделенным одной хордой. Полученный граф мы называем *деревом* древоподобной кривой. Дерево древоподобной кривой с  $n$  точками самопересечения состоит из  $n$  ребер и  $n + 1$  вершины.

Каждая вершина дерева экстремальной кривой соответствует одной из областей, на которые кривая разбивает плоскость. Дуги области диска, содержащие вершину, переводятся экстремальной иммерсией в дуги, ограничивающие соответствующую область на плоскости.

На плоскости одна из областей неограниченна. Вершина, соответствующая неограниченной области, является *корнем* корневого дерева экстремальной кривой.

**Теорема.** *Соответствие, сопоставляющее экстремальной кривой ее корневое дерево, является биекцией между множеством классов экстремальных кривых (с  $n$  точками самопересечения и имеющих индекс  $\pm(n + 1)$ ) и множеством классов плоских корневых деревьев (с  $n$  ребрами).*

Здесь эквивалентности иммерсий (равно как и деревьев) индуцированы гомеоморфизмами соответствующих плоскостей. Справедливы версии теоремы как для ориентированного, так и для неориентированного случаев.

**Пример.** На рис. 1.10 изображены гауссовы диаграммы и деревья девяти экстремальных кривых с  $n = 4$  точками самопересечения.

**Теорема.** *Инвариант  $St$  экстремальной кривой равен сумме расстояний от ее вершин до корня.*

**Пример.** Для первой кривой на рис. 1.10 сумма расстояний от вершин до корня равна 4. Для последней кривой она равна 10. Следовательно, значения инварианта  $St$  на двух кривых на рис. 1.1 равны 4 и 10, а значит, всякое однопараметрическое семейство, соединяющее эти две кривые, содержит по крайней мере шесть кривых с точками тройного самопересечения.

Значения инвариантов для кривых с  $n \leq 4$  точек самопересечения представлены на рис. 1.11 и 1.12.

Следующая теорема была сформулирована в виде гипотезы в [37]. Для инварианта  $St$  эта теорема доказана Аикарди [29] для случая древовидных кривых, а Шумаковичем [26] и Поляком [81] в общем случае. Для инварианта  $J^+$  теорему доказал Виро [91]. См. также статьи [95, 94], где приводятся все экстремальные значения инвариантов  $St$ ,  $J^\pm$  для замкнутых и длинных кривых с заданными числами вращения и двойных точек.

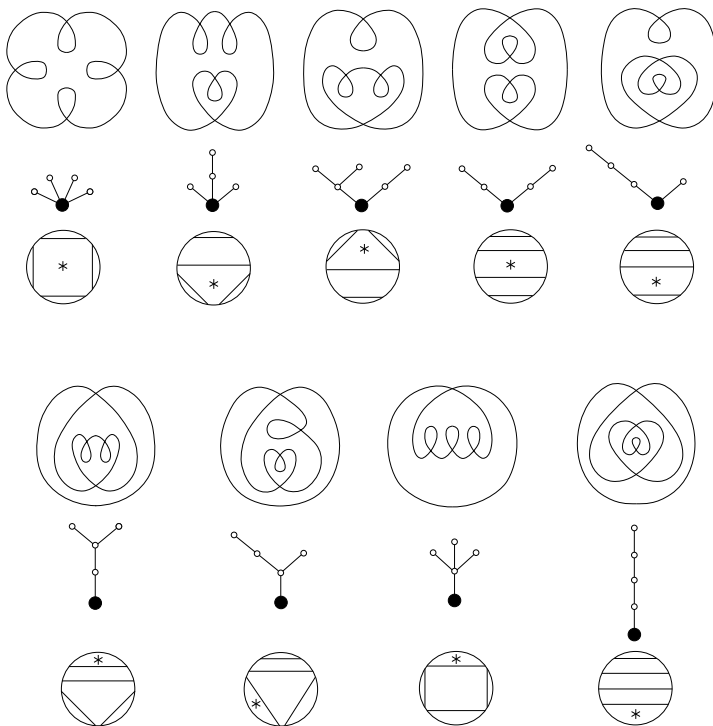


Рис. 1.10. Экстремальные кривые с четырьмя точками самопересечения, их гауссовы диаграммы и их корневые деревья

**Теорема.** Среди всех кривых общего положения с  $n$  точками самопересечения максимальное значение инварианта  $St$ , как и инвариантов  $J^\pm$ , равно  $\frac{n(n+1)}{2}$  и достигается только на экстремальной кривой  $A_{n+1}$ , имеющей корневое дерево  $\circ - \circ - \circ \dots \circ - \bullet$ .

Изучая таблицы, представленные на рис. 1.11 и 1.12, можно сформулировать тысячи теорем и гипотез, подобных приведенной выше. Таблицы инвариантов кривых с пятью самопересечениями приведены в работе [29] Ф. Аикарди, которая нашла также явное комбинаторное описание всех древоподобных кривых и явные формулы для их базисных инвариантов [28].

**Пример.** Для всех древоподобных кривых выполняется равенство  $J^+ + 2St = 0$ .

**Замечание.**  $J^+ + 2St$  является примером инварианта, обращающегося в ноль на простейших кривых. Такие инварианты можно сравнивать с функциями, имеющими ноль некоторого порядка в на-

































$n=0$		$n=1$			$n=2$										
	$i=1$		$i=0$	$i=2$		$i=1$	$i=1$	$i=1$	$i=3$	$i=3$					
St	0	St	0	1	St	0	0	1	2	3					
$J^+$	0	$J^+$	0	-2	$J^+$	0	0	-2	-4	-6					
$J^-$	0	$J^-$	-1	-3	$J^-$	-2	-2	-4	-6	-8					
$n=3$															
$i=0$															
St	0		0		0		0		-1		1		2		
$J^+$	0		0		0		2		2		-2		-4		
$J^-$	-3		-3		-3		-1		-1		-5		-7		
$n=3$															
$i=2$															
St	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$J^+$	-6	-4	-4	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0
$J^-$	-9	-7	-7	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-3	-3	-3	-3	-3
$n=3$															
$i=4$															
St	3			4			5			6					
$J^+$	-6			-8			-10			-12					
$J^-$	-9			-11			-13			-15					

Рис. 1.11. Базисные инварианты кривых с  $n < 4$  точками самопересечения

чале координат, в том же самом смысле, в котором инварианты Васильева ведут себя подобно многочленам. Можно рассматривать выражение  $J^+ + 2\text{St}$  в качестве «дефекта» иммерсии. Изучая дефект, можно найти его явное эмпирическое описание через комбинаторику кривой (и ее «морсификации»). Однако это выражение (обозначим его через  $E_1$ ) равно  $J^+ + 2\text{St}$  только для не очень сложных кривых (очевидно,  $E_1$  обращается в ноль на древоподобных кривых).

Возникает вопрос, можно ли естественным образом продолжить ряд

$$0 = J^+ + 2\text{St} - E_1 + E_2 + \dots,$$

добавляя подходящие инварианты  $E_i$ , обращающиеся в ноль на возрастающих множествах «простейших» кривых.

$i = 1$																
St	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	4		
$J^+$	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-8		
$J^-$	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12		
$i = 1$																
St	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3		
$J^+$	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-4	-4	-6		
$J^-$	-2	-2	-2	4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-10		
$i = 1$								$i = 1$						$i = 1$		
St	0	0	0	0	1	1	1	St	-2	1	1	1	2	2	St	0
$J^+$	2	2	2	2	0	0	0	$J^+$	4	-2	-2	-2	-4	-4	$J^+$	0
$J^-$	-2	-2	-2	-2	-4	-4	-4	$J^-$	0	-6	-6	-6	-8	-8	$J^-$	-4
$i = 3$																
St	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6		
$J^+$	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12		
$J^-$	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-16		
$i = 3$																
St	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	5	5		
$J^+$	-2	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-8	-8	-10	-10	-10	-10		
$J^-$	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-12	-12	-14	-14	-14	-14		
$i = 3$				$i = 3$					$i = 3$			$i = 3$				
St	2	3	3	St	0	3	4	4	St	2	2	St	2			
$J^+$	-2	-4	-4	$J^+$	0	-6	-8	-8	$J^+$	-4	-4	$J^+$	-4			
$J^-$	-6	-8	-8	$J^-$	-4	-10	-12	-12	$J^-$	-8	-8	$J^-$	-8			
$i = 5$				$i = 5$					$i = 5$			$i = 5$				
St	6	7	10	St	5	6	8	9	St	4	4	St	7			
$J^+$	-12	-14	-20	$J^+$	-10	-12	-16	-18	$J^+$	-8	-8	$J^+$	-14			
$J^-$	-16	-18	-24	$J^-$	-14	-16	-20	-22	$J^-$	-12	-12	$J^-$	-18			

Рис. 1.12. Базисные инварианты кривых с четырьмя точками самопересечения

### §1.5. Нумерология

Количества классов иммерсий общего положения окружности в плоскость, имеющих  $n$  точек самопересечений, приведены в следующей таблице:

ориентация	$n = 0$	1	2	3	4	5
$\mathbb{R}^2, S^1$	2	3	10	39	204	1262
$\mathbb{R}^2$	1	2	5	21	102	639
$S^1$	1	2	5	21	102	640
—	1	2	5	20	82	435

Количества типов неориентированных кривых, иммерсированных в ориентированную плоскость, и ориентированных кривых, иммерсированных в неориентированную плоскость, при  $n \leq 4$  совпадают. Однако типы самих кривых различны (см. рис. 1.13).

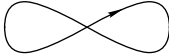
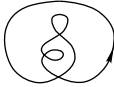



 суперсимметричная	$f\sigma = Tf \sim f, \quad [f\sigma] = [f].$ $\Sigma f = Tf\tau \sim f, \quad [\Sigma f] = [f].$ $\Sigma f\sigma = f\tau \sim f, \quad [\Sigma f\sigma] = [f].$
 асимметричная	$[f], [f\sigma], [\Sigma f], [\Sigma f\sigma]$ все различны.
 симметричная (1)	$\Sigma f\sigma = f, \quad T(f\sigma) = \Sigma(f\tau),$ $[\Sigma f\sigma] = [f], \quad [f\sigma] = [\Sigma f].$
 симметричная (2)	$f\sigma = Tf \sim f, \quad \Sigma f\sigma = T(\Sigma f) \sim \Sigma f,$ $[f\sigma] = [f], \quad [\Sigma f\sigma] = [\Sigma f].$
 симметричная (3)	$\Sigma f = f\tau \sim f, \quad \Sigma f\sigma = (f\sigma)\tau \sim f\sigma,$ $[\Sigma f] = [f], \quad [\Sigma f\sigma] = [f\sigma].$

Рис. 1.13. Типы симметрий плоских кривых

**Замечание.** Обозначим через  $\tau$  и  $T$  стандартные антиподальные инволюции окружности и плоскости, а через  $\sigma$  и  $\Sigma$  — стандартные инволюции, обращающие ориентацию. Эти инволюции действуют на пространстве иммерсий. Под действием этих инволюций и их комбинаций некоторые классы инвариантны, а некоторые — нет.

Иммерсия

$$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

симметрична (относительно  $\sigma$  и  $\Sigma$ ), если

$$f\sigma = \Sigma f, \quad \text{или, что равносильно,} \quad \Sigma f\sigma = f.$$

Если индекс иммерсии  $f$  равен нулю, то имеются еще две возможности:

$$f\sigma = Tf, \quad \text{или, что равносильно,} \quad Tf\sigma = f,$$

$$f\tau = \Sigma f, \quad \text{или, что равносильно,} \quad \Sigma f\tau = f.$$

Иммерсия называется асимметричной, симметричной или суперсимметричной, если число различных классов среди иммерсий

$$f, \quad \Sigma f\sigma, \quad Tf\sigma, \quad \Sigma f\tau$$

равно 4, 2 или 1 соответственно.

**Пример.** Стандартная «восьмерка» суперсимметрична. Стандартная вложенная окружность симметрична ( $[\Sigma f\sigma] = [f]$ ,  $[Tf\sigma] = [\Sigma f\tau]$ ).

**Замечание.** Если тип  $[f]$  кривой  $f$  симметричен, то он содержит симметричного представителя:  $\Sigma f\sigma = f$ ,  $Tf\sigma = \Sigma f\tau$ .

Это справедливо также и для других классификационных задач о вырождении кривых, но в некоторых классификационных задачах для многообразий большей размерности эквивариантные классы могут не содержать, вообще говоря, эквивариантных объектов.

Примеры симметричных кривых трех типов

$$\Sigma f\sigma = f, \quad Tf\sigma = f \quad \text{и} \quad Sf\tau = f$$

изображены на рис. 1.13. Вклад кривых, имеющих одну из таких симметрий, в соответствующий столбец приведенной выше таблицы равен (2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1) или (2, 1, 2, 1) соответственно. Вклад суперсимметричной кривой равен (1, 1, 1, 1). Всякая асимметричная кривая дает вклад (4, 2, 2, 1).

Распределение ориентированных кривых на ориентированной плоскости по их индексам выглядит приблизительно гауссовым:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & 2 & 3 & 3 & 2 \\
 & 4 & 10 & 11 & 10 & 4 \\
 10 & 35 & 57 & 57 & 35 & 10 \\
 26 & 133 & 290 & 364 & 290 & 133 & 26
 \end{array}$$

Например, среди различных типов кривых, имеющих пять точек самопересечения, 26 имеют индекс 5, 133 имеют индекс 4 и т. д.



Количества типов кривых на сфере  $S^2$  даются следующей таблицей:

ориентация	$n = 0$	1	2	3	4	5
$S^2, S^1$	1	1	3	9	37	182
$S^2$	1	1	2	6	21	99
$S^1$	1	1	2	6	21	97
—	1	1	2	6	19	76

76 сферических кривых с пятью точками самопересечения изображены на рис. 1.14. Числа углов сферических многоугольников, на которые кривая делит сферу, указаны ниже кривой.


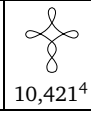
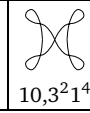
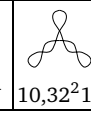
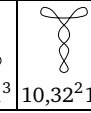
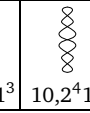
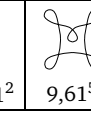
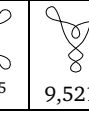
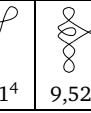
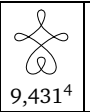
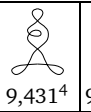
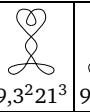
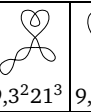
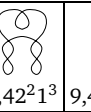
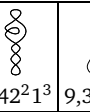
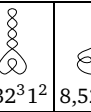
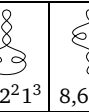
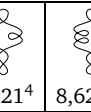

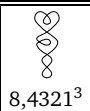
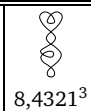
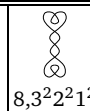

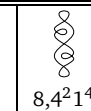
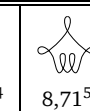
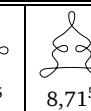
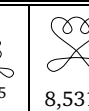
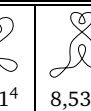
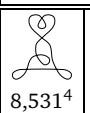
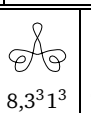
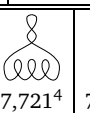
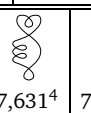
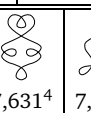

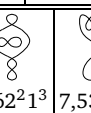
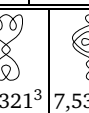
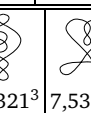


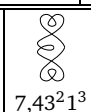
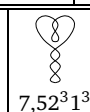
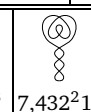
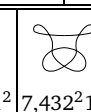
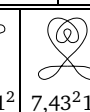
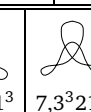
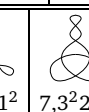
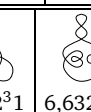
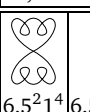
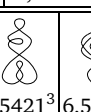
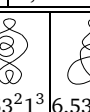
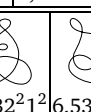
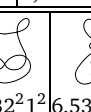
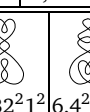
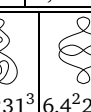
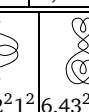
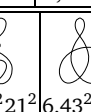

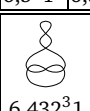
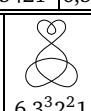
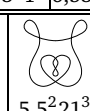
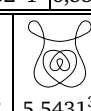
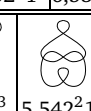
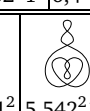
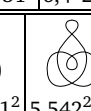
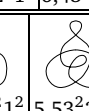
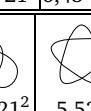
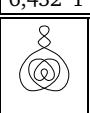
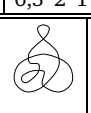
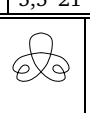
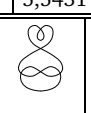
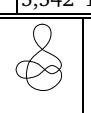
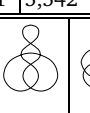
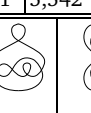
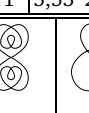
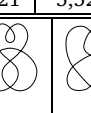

									
									
									
									
									
									
									
									

Рис. 1.14. Сферические кривые с пятью точками самопересечения

Вычисления, приводящие к этим таблицам, основаны на своеобразной комбинаторике (см. [42]) разложения образа типичной иммерсии на границу одной из областей, на которые кривая разделяет сферу, и оставшуюся часть кривой (следует выбирать область с самой длинной границей).

Иммерсия кривой называется *приводимой*, если какая-нибудь из ее точек самопересечения разбивает образ на две неприводимые петли.

Неприводимые иммерсии образуют элементарные блоки, из которых составляются остальные иммерсии. Классификация неприводимых иммерсий кривых с  $n \leq 7$  точками самопересечения изображена на рис. 1.15.

























$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	
	-	-						
								
								
								
								
								
								

Рис. 1.15. Неприводимые сферические кривые с  $n < 8$  точками самопересечения

Многие из этих неприводимых кривых являются «комбинациями» более простых. Например, первые две кривые с шестью точками самопересечения являются двумя различными комбинациями двух трилистников. Тем не менее, формальная теория, описывающая эту комбинаторику, мне неизвестна.

## §1.6. Кобордизмы

Одна из попыток организовать множество классов кривых в алгебраическую структуру приводит к более грубой классификации их классов кобордизмов.

Можно рассматривать классы, которые являются компонентами дополнения всего дискриминанта или некоторой его части, т. е. допускать *некоторые* необщие иммерсии в наших классах и не допускать другие. Из трех возможных вырождений: тройного самопересечения (\*), попутного (+) и противоположного (–) самокасания — получается  $2^3 = 8$  различных теорий.

**Пример.** (+–) — это теория, в которой самокасание кривой не допускается, в то время как точки тройного самопересечения допускаются.

Я назову две иммерсии общего положения кривой в плоскость *кобордантными*, если их можно соединить между собой цепочкой последовательных перестроек следующих двух типов.

1. Трансверсальное пересечение тех компонент дискриминанта, которые считаются допустимыми в данной теории.

2. Морсовская перестройка, состоящая в рождении или смерти маленькой окружности (эллиптический случай) или в переключении ветвей ориентированной гиперболы (гиперболический случай, см. рис. 1.16).

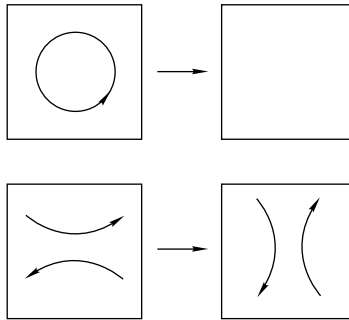


Рис. 1.16. Ориентированные морсовские перестройки иммерсированных кривых

Классы кобордизмов иммерсий в каждой из восьми теорий образуют коммутативную полугруппу (с операцией несвязного объединения двух иммерсий в левую и правую полуплоскости соответственно в качестве группового умножения). В большинстве случаев эта полугруппа является группой.

**Теорема.** (Полу)группы классов кобордизмов во всех восьми теориях иммерсий даются следующей таблицей:

запрещены	* + –	* +	* –	+ –	+	–	*	$\emptyset$
(полу)группа	$\mathbb{Z}_2^+$	$\mathbb{Z}_2^\infty$	$\mathbb{Z}_2^\infty$	$H$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^\infty$	$\mathbb{Z}_2$
образующие	$X_i$	$X_i$	$X_i$	$X_i$	$X_0$	$X_0$	$X_i$	$X_0$

где

- $\mathbb{Z}_+$  — полугруппа неотрицательных целых чисел;
- $\mathbb{Z}_2$  — группа, состоящая из двух элементов;
- $H$  — полугруппа, заданная образующими  $X_i$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и соотношениями  $3X_i = 3X_j$ ,  $2X_i + X_{i+1} = X_i + 2X_{i+1}$ .

Кривые, представляющие образующие  $X_i$ , изображены на рис. 1.17.

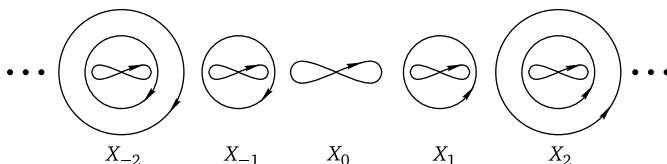


Рис. 1.17. Образующие полугрупп кобордизмов

Элементы полугруппы  $H$  задаются целозначными функциями на множестве  $\mathbb{Z}$  целых точек прямой. Каждый элемент эквивалентен функции, представленной либо набором роц вида  $(1, 1, \dots, 1)$  или  $(2, 1, 1, \dots, 1)$ , разделенных нулями, либо одной башней высоты не меньше 3, стоящей в начале координат, с нулями в остальных точках.

Задача определения эквивалентности для таких роц — интересная задача комбинаторики базисов Грёбнера (она связана также с теорией так называемых абелевых лавин).

## §1.7. Длинные кривые

*Длинной кривой* называется иммерсия прямой в плоскость, которая отличается от стандартного вложения оси  $x$  только внутри ограниченной области.

**Пример.** Классификация длинных кривых общего положения с  $n \leq 2$  точками самопересечения представлена на рис. 1.18.

Изложенная выше теория может быть приспособлена к случаю длинных кривых. Длинные кривые удобнее иммерсий окружности по следующим двум причинам.

1. Для длинных кривых «сложение» (которое ассоциативно, но в общем случае некоммутативно) корректно определено; индекс (число полных оборотов касательного вектора вдоль иммерсированной кривой) аддитивен по отношению к сложению кривых.

2. Пространство длинных кривых данного комбинаторного типа стягиваемо.

Действительно, комбинаторный тип общей длинной кривой задается следующими данными. Во-первых, построим *диаграмму Васю*

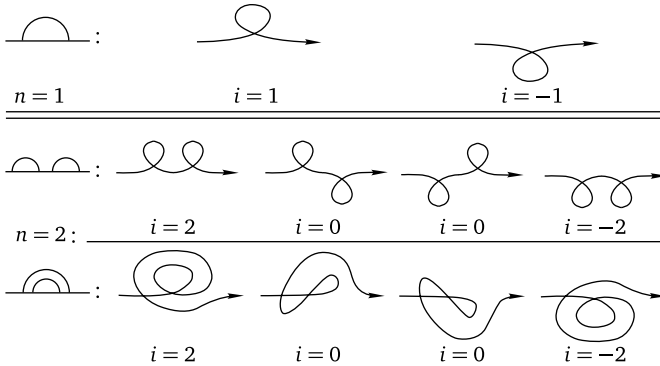


Рис. 1.18. Длинные кривые с одной и двумя точками самопересечения

лева иммерсии, соединив каждую пару прообразов точек самопересечения прямой Лобачевского в верхней полуплоскости, ограниченной иммерсируемой прямой (это не что иное, как гауссова диаграмма, оснащенная дополнительной точкой на окружности).

Длинные кривые с фиксированной диаграммой Васильева (и фиксированными «ориентациями», определенными ниже) образуют стягиваемое пространство.

Действительно, длинную кривую можно построить шаг за шагом, добавляя дуги, соединяющие последовательные прообразы точек самопересечения. На каждом шаге новая дуга соединяет данную начальную точку с данной конечной точкой, причем последняя принадлежит либо односвязной области, либо ее границе (которой принадлежит также и начальная точка). Эта односвязная область является одной из компонент дополнения той части кривой, которая уже построена. Конечная точка дуги лежит внутри области, если строящаяся кривая проходит через нее в первый раз, и на границе области, если во второй.

Различные способы выбора конечной точки и дуги, подходящей к ней, образуют стягиваемое пространство всегда за исключением тех случаев, когда конечная точка принадлежит отрезку границы области и область подходит к этому отрезку с обеих сторон (что вполне может случиться). В этом случае пространство возможных выборов состоит из двух стягиваемых компонент. Эти компоненты различаются дополнительной комбинаторной структурой, которую мы называем «ориентацией».

Аналогичное комбинаторное описание имеется для всех стратов дискриминанта произвольной коразмерности.

Таким образом, комбинаторика длинных кривых, описываемая ориентированными диаграммами и их примыканиями, задает неко-

торый вариант клеточного разбиения (на клетки бесконечной размерности, но конечной коразмерности) дискриминанта и его дополнения. В принципе, ответы на все вопросы о топологии дополнений к различным стратам дискриминанта можно сформулировать в терминах алгебры ориентированных диаграмм. Однако соответствующие инварианты еще только предстоит вычислить, и ниже я приведу только самые простые факты об этой стратификации.

Рассмотрим  $J^+$ -теорию, для которой дискриминант состоит из иммерсий длинных кривых, имеющих точку попутного самокасания. В дальнейшем в этом пункте под дискриминантом мы подразумеваем именно эту гиперповерхность в пространстве всех длинных кривых.

**Определение.** *Инвариантом Васильева первого порядка* называется функция на пространстве длинных кривых, постоянная на компонентах дополнения к дискриминанту и при пересечении дискриминанта в положительном направлении совершающая скачок, величина которого не меняется вдоль дискриминанта (при пересечении стратов, коразмерность которых в дискриминантной гиперповерхности равна единице).

Это определение дано по аналогии с исходным определением Васильева (см. [90, 38]).

**Теорема.** *Инварианты Васильева первого порядка для длинных кривых однозначно задаются (с точностью до инварианта нулевого порядка, который пропорционален индексу) набором  $\{f_i, i \in \mathbb{Z}\}$  своих скачков при пересечении дискриминанта (в направлении возрастания числа точек самопересечения) в специальных длинных кривых  $l_i$ , изображенных на рис. 1.19. Числа  $f_i$  независимы и могут быть выбраны произвольно.*

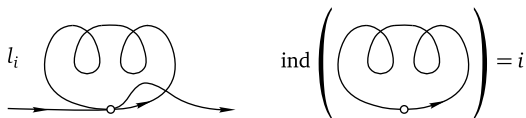


Рис. 1.19. Специальные длинные кривые  $l_i$ , имеющие индекс  $i$  и точку попутного самокасания

**Замечание.** Эта теорема показывает, что теория плоских кривых сложнее теории пространственных узлов, в которой инварианты Васильева первого порядка тривиальны.

Бесконечномерность пространства инвариантов первого порядка отражает бесконечность множества «неприводимых компонент» дискриминанта.

## Глава 2

# Лежандровы узлы

В последующих параграфах этой главы я опишу приложения геометрии дискриминанта к изучению фронтов лежандровых узлов. Детали и доказательства можно найти в [9].

### § 2.1. От плоских кривых к лежандровым узлам

Лежандров узел — это лежандрово вложение окружности в контактное пространство. Я буду рассматривать контактное трехмерное многообразие коориентированных контактных элементов на плоскости. Всякая плоская кривая без попутных самокасаний задает такой лежандров узел. Лежандровы узлы общего положения образованы контактными элементами плоской кривой, которая может иметь точки возврата.

Вернемся к задаче классификации иммерсий окружности в плоскость. Мы будем оставаться в рамках  $J^+$ -теории, и, следовательно, наш дискриминант будет множеством иммерсий, имеющих попутные самокасания. В  $J^+$ -теории мы хотим классифицировать компоненты пространства иммерсий без попутных самокасаний.

С каждой такой иммерсией можно связать узел (вложение окружности в трехмерное многообразие).

**Определение.** *Контактный элемент* плоскости — прямая (векторное подпространство коразмерности один, а следовательно, размерности один) в касательной плоскости. *Коориентация* контактного элемента состоит в выборе одной из двух полуплоскостей, на которые эта прямая разделяет касательную плоскость.

Многообразие всех (коориентированных) контактных элементов плоскости диффеоморфно полноторию  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . В качестве координат на этом многообразии можно рассмотреть две декартовы координаты  $(x, y)$  точки плоскости и азимут  $\varphi \pmod{2\pi}$  коориентирующего нормального вектора (рис. 2.1). Соответствующий контактный элемент задается уравнением

$$(\cos \varphi) dx + (\sin \varphi) dy = 0.$$

Иммерсия окружности в (ориентированную) плоскость задает кривую на многообразии (коориентированных) контактных элементов. Ориентация плоскости задает выбор такой коориентации всякого контактного элемента, касательного к иммерсированной кривой, что пара (ориентирующий вектор, коориентирующий вектор) задает положительную ориентацию плоскости.

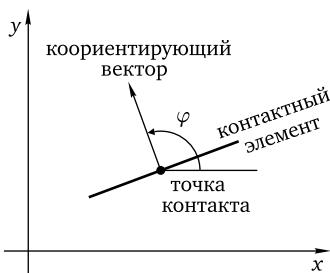


Рис. 2.1. Координаты контактного элемента

**Определение.** Построенная кривая в многообразии контактных элементов плоскости называется *лежандровой кривой* иммерсии.

**Замечание.** В общем случае лежандрово подмногообразии (размерности  $t$  в контактном многообразии размерности  $2m + 1$ ) — это максимальное интегральное подмногообразие контактной структуры.

Естественная контактная структура многообразия контактных элементов некоторого многообразия-базы задается тавтологическим полем гиперплоскостей. Гиперплоскость тавтологического поля в некоторой точке многообразия контактных элементов является прообразом *самого этого элемента* при проекции на базу (отображающей контактный элемент в точку его контакта с многообразием-базой).

Естественная контактная структура трехмерного многообразия (коориентированных) контактных элементов плоскости является полем ядер дифференциальной 1-формы  $(\cos \varphi) dx + (\sin \varphi) dy$  на трехмерном многообразии  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  с координатами  $(x, y, \varphi: \text{mod } 2\pi)$ .

Введенная выше лежандрова кривая иммерсии является лежандровым подмногообразием многообразия (коориентированных) контактных элементов плоскости. Проекция лежандрова подмногообразия многообразия (коориентированных) контактных элементов (некоторого многообразия-базы) на базу называется *фронт* этого лежандрова подмногообразия.

В общем случае фронт является (коориентированной) гиперповерхностью базы, но он может иметь особенности.



**Пример.** Фронтом лежандрова подмногообразия иммерсии окружности на плоскость является сама иммерсированная кривая, коориентированная нормальными, которые образуют вместе с вектором скорости, поставленным на первое место, положительное оснащение плоскости.

(Коориентированный) фронт однозначно задает лежандрово подмногообразие.

В  $J^+$ -теории иммерсированные кривые не имеют попутных самокасаний. Лежандровы кривые фронтов без попутных самокасаний не имеют самопересечений. Следовательно, каждому классу иммерсий без попутных самокасаний можно сопоставить класс узла в  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ .

Каждый инвариант узлов в  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  задает инвариант типа  $J^+$  иммерсий.

Шумакович, а также Горюнов, Чмутов и Мураками [51] показали, что всякий (обычный) узел в  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  имеет представителя, который является лежандровой кривой плоской иммерсии без попутных самокасаний. Из этого вытекает, что теория узлов вкладывается в теорию плоских иммерсий (предоставляя некоторую «грубую» классификацию  $J^+$ -классов иммерсий).

Две иммерсии окружности в плоскость, не имеющие попутных самокасаний, могут задавать изотопные узлы в  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , которые неизотопны в пространстве лежандровых вложений. Даже если они и изотопны в пространстве лежандровых вложений, фронты промежуточных лежандровых кривых соединяющего их пути могут иметь точки возврата, и, следовательно, иммерсии могут принадлежать различным компонентам.

Таким образом, теория узлов в  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  является лишь малой частью  $J^+$ -классификационной задачи иммерсий окружности в плоскость.

## § 2.2. Пространство лежандровых кривых

Пусть  $M^3 = ST^*\mathbb{R}^2$  — многообразие (коориентированных) контактных элементов ориентированной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Многообразие  $E^4$  направлений векторов контактных плоскостей в  $M^3$  диффеоморфно  $\mathbb{R}^2 \times S_1^1 \times S_2^1$ . (Оба расслоения,  $M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  со слоем  $S_1^1$  и  $E^4 \rightarrow M^3$  со слоем  $S_2^1$ , обладают естественными тривиализациями, заданными выбором евклидовой метрики и ориентацией плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В этом месте важно, что мы имеем дело с *ориентированными* контактными элементами.) Таким образом, имеются две проекции,  $\pi_1: E^4 \rightarrow S_1^1$  и  $\pi_2: E^4 \rightarrow S_2^1$ , многообразия  $E^4$  на окружность.

Всякая лежандрова иммерсия  $f: S^1 \rightarrow M^3$  ориентированной окружности в многообразии ориентированных контактных элементов задает два «гауссова отображения» ориентированных окружностей

$$g_1: S^1 \rightarrow S_1^1, \quad g_2: S^1 \rightarrow S_2^1,$$

а именно

$$g_1 = \pi_1 \circ (f_*e), \quad g_2 = \pi_2 \circ (f_*e),$$

где  $e$  — векторное поле, ориентирующее окружность  $S^1$  и такое, что вектор  $f_*e$  имеет длину 1.

**Определение.** Степень отображения  $g_1$  называется *индексом лежандровой иммерсии*  $f: S^1 \rightarrow M^3$ ; удвоенная степень отображения  $g_2$  называется *индексом Маслова*:

$$\deg g_1 = \text{ind}, \quad 2 \deg g_2 = \mu.$$

Индекс и индекс Маслова общей лежандровой иммерсии кривой в пространство  $M^3$  коориентированных контактных элементов плоскости легко вычислить в терминах ее фронта.

**Теорема.** *Индекс  $\text{ind}$  лежандровой иммерсии ориентированной окружности в пространство  $M^3$  равен количеству полных оборотов коориентирующего нормального вектора к ее фронту.*

*Индекс Маслова  $\mu$  общей лежандровой иммерсии ориентированной окружности в пространство  $M^3$  равен разности между числом положительных и числом отрицательных точек возврата фронта:  $\mu = \mu_+ - \mu_-$ .*

Точка возврата на ориентированном коориентированном фронте называется *положительной*, если коориентирующая 1-форма положительна на ориентирующих векторах в окрестности точки возврата (в которой ориентирующий вектор обращается в ноль). Индекс Маслова меняет знак при обращении ориентации или коориентации фронта, но он *не* зависит от выбора ориентации плоскости и сохраняется при отражениях этой плоскости.

**Пример.** Значения индексов простейших фронтов показаны на рис. 2.2.

Рассмотрим лежандрову ориентированную кривую, иммерсированную в многообразии коориентированных контактных элементов ориентированной плоскости. Снабдим их классы кобордизмов обычной операцией несвязного объединения (см. подробности в [4]). Получившаяся группа кобордизмов циклическая, и фронтом ее образующей является «бабочка», см. рис. 2.2. Этот фронт имеет форму «восьмерки», но с двумя положительными точками возврата. Индекс Маслова бабочки равен 2. Следовательно, число бабочек, образующих фронт кривой, кобордантной данной, равно половине индекса Маслова.

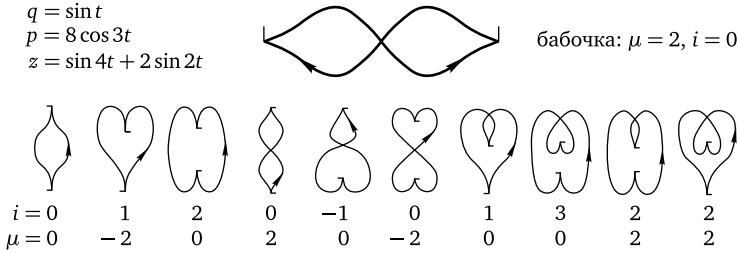


Рис. 2.2. Индексы простейших лежандровых кривых

**Теорема.** Пространство  $\Omega_{i,\mu}$  всех лежандровых иммерсий окружности в плоскость с фиксированными значениями обоих индексов связно.

Эту теорему (принадлежащую, вероятно, Громову [65]) можно доказать тем же методом, использующим расслоение в смысле Серра, который применял Смейл [85] при изучении пространства обычных иммерсий.

**Замечание.** Метод Смейла приводит к заключению, что группы гомотопий пространства  $\Omega_i$  нормализованных иммерсий  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  произвольного фиксированного индекса  $i$  тривиальны (нормализованная иммерсия переводит некоторую фиксированную точку окружности  $S^1$  и касательный вектор в ней в фиксированные точку и касательный вектор в  $\mathbb{R}^2$  соответственно). Равенство  $H^1(\Omega_i) = 0$  является решающим для конструкции инвариантов, заданных индексами пересечения с дискриминантной поверхностью пространства иммерсий (или по крайней мере нужно убедиться в том, что 1-коцикл на  $\Omega_i$ , заданный коориентированным дискриминантом, тривиален).

Существование дополнительного индекса  $\mu$  в классификации связных компонент пространства лежандровых иммерсий не является единственной сложностью: нормализация, делающая пространство отображений (слабо) гомотопически эквивалентным точке, больше невозможна.

**Определение.** Лежандрова иммерсия

$$S^1 \rightarrow M^3 = ST^*\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$$

называется *отмеченной*, если заданная (раз и навсегда) точка окружности  $S^1$  переводится в заданный (раз и навсегда) контактный элемент ориентированной евклидовой плоскости.

Группа  $G_3$  евклидовых движений действует на  $M^3$  без неподвижных точек. Следовательно, она действует без неподвижных точек на

пространстве лежандровых иммерсий, которое, таким образом, расслоено на слои вида  $\mathbb{R}^2 \times S^1 \approx G_3$ . Отмеченные иммерсии задают сечение этого главного  $G_3$ -расслоения. Следовательно, *пространство лежандровых иммерсий является прямым произведением пространства отмеченных лежандровых иммерсий на группу Ли евклидовых движений плоскости,*

$$\Omega_{i,\mu} = \Omega_{i,\mu}^0 \times (\mathbb{R}^2 \times S^1),$$

где  $\Omega_{i,\mu}^0$  — *пространство отмеченных иммерсий.*

Дискриминанты и их коориентации  $G_3$ -инвариантны. Поэтому в конструкции инвариантов достаточно рассматривать только отмеченные иммерсии.

В случае обычных иммерсий редукция пространства всех иммерсий к подпространству нормализованных иммерсий делает топологию тривиальной. В лежандровом случае это уже не так. Действительно, направление отмеченной лежандровой кривой в контактной плоскости в выбранной точке не фиксировано. Окружность  $S_2^1$  возможных выборов этого направления делает пространство  $\Omega_{i,\mu}^0$  неодносвязным.

## § 2.3. Базисный инвариант $J^+$

Дискриминант (образованный из лежандровых кривых, фронты которых не находятся в общем положении) имеет четыре компоненты, соответствующие различным событиям: точкам тройного самопересечения, самокасаниям, протыканиям фронта его точками возврата и рождениями точек возврата. Здесь я буду рассматривать только компоненту, соответствующую самокасаниям.

Самокасание называется *опасным*, если обе касающиеся ветви коориентированы одной и той же полуплоскостью.

**Теорема.** *Гиперповерхность опасных самокасаний фронтов в пространстве лежандровых иммерсий окружности в пространство коориентированных контактных элементов плоскости коориентируема.*

Естественная коориентация этой гиперповерхности задается следующей конструкцией. Назовем самокасание положительным, если ориентирующие и коориентирующие векторы задают одну и ту же ориентацию для обеих ветвей, и отрицательным в противном случае.

Опасное самокасание положительно, если ориентации обеих касающихся ветвей совпадают, и отрицательно, если эти ориентации противоположны.

*Положительной стороной* гиперповерхности опасных самокасаний считается сторона, на которой фронты имеют больше точек са-

мопересечения, если данное самокасание *положительно*, и сторона, на которой имеется *меньше* точек самопересечения, если оно отрицательно.

**Замечание.** Эта коориентация *не* зависит от ориентации окружности и плоскости.

**Замечание.** Гиперповерхность тройных самопересечений фронтов *не* коориентируема. Поэтому инвариант странности не имеет очевидного лежандрова аналога. Обобщение инварианта странности на случай фронтов приведено Аикарди в работе [33].

Гиперповерхность неопасных самокасаний *коориентируема*, и ее коориентация задается конструкцией, аналогичной приведенной выше для опасных самокасаний.

**Замечание.** Индекс и индекс Маслова базисных кривых  $K_{j,k}$  равны соответственно  $\pm j$  и  $\pm 2k$ ; знаки зависят от выбора ориентаций и коориентаций.

**Теорема.** (Коориентированная) гиперповерхность опасных самокасаний фронтов в пространстве лежандровых иммерсий окружности в многообразии коориентированных контактных элементов плоскости когомологична нулю.

Таким образом, чтобы определить инвариант, имеющий фиксированный скачок при пересечении в положительном направлении дискриминанта опасных самокасаний фронтов, достаточно выбрать по одной кривой в каждой компоненте  $\Omega_{i,\mu}$  пространства лежандровых иммерсий и зафиксировать для них значения инварианта.

**Определение.** Инвариант  $J^+$  лежандровых иммерсий окружности в пространство коориентированных контактных элементов плоскости задается следующими нормализационными соглашениями: его приращение при положительном пересечении дискриминанта опасных самокасаний равно 2, а значения на базисных кривых, изображенных на рис. 2.3, равны

$$J^+(K_{i+1,k}) = -2i - k \quad (i \geq 0, k \geq 0), \quad J^+(K_{0,k}) = -k$$

для всех возможных выборов ориентаций и коориентаций кривых.

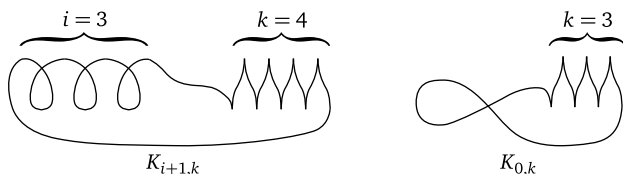


Рис. 2.3. Стандартные кривые  $K_{j,k}$

**Теорема.** Значение инварианта  $J^+$  не зависит ни от выбора ориентации, ни от выбора коориентации фронта и сохраняется при отражении плоскости относительно прямой. Этот инвариант является локальным. Он аддитивен по отношению к (обычной) связанной сумме фронтов.

Локальность инварианта означает, что его скачок при опасном самокасании зависит только от поведения семейства лежандровых иммерсий в некоторой окрестности двух точек прообраза точки самокасания фронта.

**Теорема.** Всякий локальный аддитивный инвариант лежандровых кривых без опасных самокасаний фронтов, инвариантный при обращениях ориентации, пропорционален  $J^+$ .

Коэффициент пропорциональности однозначно задается значением инварианта на произвольной кривой, для которой  $J^+$  отлично от нуля. Я выбрал нормализацию  $J^+(K_2) = -2$  для простейшего фронта  $K_2$  с единственной точкой самопересечения, или, что эквивалентно,  $J^+(K_{1,1}) = -1$  для «сердечка» — кривой без точек самопересечения, имеющей индекс 1 и индекс Маслова 2.

Теоремы единственности гарантируют, что значение инварианта  $J^+$  на произвольной лежандровой иммерсии окружности, фронт которой не имеет точек возврата, совпадает со значением инварианта  $J^+$  его фронта (рассматриваемого как иммерсия окружности в плоскость).

**Замечание.** М. Поляк привел в работе [81] примеры нелокальных аддитивных инвариантов плоских иммерсированных кривых. Модифицировав конструкцию Поляка, можно построить нелокальные аддитивные инварианты лежандровых иммерсий. Насколько мне известно, классификация таких инвариантов не проведена.

## § 2.4. Лежандровы коэффициенты зацепления

Изменение инварианта  $J^+$  вдоль пути, соединяющего две данные кривые в пространстве лежандровых иммерсий, отражает количество необходимых самопересечений промежуточных лежандровых кривых. Поэтому этот инвариант естественно сравнить с индексами самозацепления этих кривых.

Для лежандровых кривых в  $\mathbb{R}^3$  такой индекс самозацепления определил Беннекен [45]. Однако в нашем случае пространство  $M^3 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$  неоднозначно и инварианта Беннекена недостаточно. Я использую следующую конструкцию (предложенную, по существу, С. Л. Табачниковым в [22]).

**Случай 1. Лежандровы кривые нулевого индекса.** Рассмотрим универсальную накрывающую  $\mathbb{R}^3 \rightarrow M^3$  с индуцированной контактной структурой. Эта структура является «стандартной»:

$$(\cos \varphi) dx + (\sin \varphi) dy = dz - p d\varphi,$$

где

$$z = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad p = x \sin \varphi - y \cos \varphi.$$

Лежандрова кривая нулевого индекса накрывается бесконечной последовательностью лежандровых кривых  $c_j$  (зафиксируем одну из компонент  $c_0$  и обозначим через  $c_j$  компоненту, полученную сдвигом  $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi j$  из  $c_0$ ).

**Определение.** Коэффициентом самозацепления  $L_j$  исходной кривой называется коэффициент зацепления кривых  $c_0$  и  $c_j$  при  $j \neq 0$  и инвариант Беннекена кривой  $c_0$  при  $j = 0$ . Очевидно,  $L_j = L_{-j}$ .

Инвариантом Беннекена лежандровой кривой  $c_0$  в  $\mathbb{R}^3$  называется индекс пересечения двумерной цепи, границей которой является  $c_0$ , с кривой  $c_\varepsilon$ , полученной из  $c_0$  маленьким сдвигом в направлении, всюду трансверсальном контактной плоскости. Это число не зависит от выбора цепи и от сдвинутой кривой (можно использовать также сдвиг в направлении, принадлежащем контактной плоскости, но всюду трансверсальном направлению самой кривой).

**Замечание.** Инвариант Беннекена  $L_0$  является инвариантом лежандровой кривой  $c_0$ : он сохраняется при контактоморфизмах пространства  $\mathbb{R}^3$ . Индексы зацепления  $L_i$  ( $i \neq 0$ ) не являются инвариантами контактного типа кривой  $c_0$  в  $\mathbb{R}^3$  (они зависят от типа исходной лежандровой кривой в  $M^3$ ).

Знак числа  $L_i$  зависит от ориентации многообразия  $M^3$ . Но всякое контактное трехмерное многообразие имеет естественную ориентацию (заданную формой  $\alpha \wedge d\alpha$ ).

**Случай 2. Лежандровы кривые индекса  $i > 0$ .** Рассмотрим  $i$ -листное накрытие  $\tilde{M} \rightarrow M$ . Кривая индекса  $i$  в  $M$  накрывается  $i$  замкнутыми кривыми  $c_j$  ( $j \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ ) в  $\tilde{M}$  (зафиксированной начальной кривой и ее сдвигами).

Индекс зацепления  $L_j$  кривых  $c_0$  и  $c_j$  определяется как индекс пересечения кривой  $c_j$  с 2-цепью с границей  $c_0 - c_0^*$ , где кривая  $c_0^*$  задана уравнениями ( $x = N$ ,  $y = 0$ ) для некоторого очень большого  $N$  в координатах  $(x, y, \varphi \pmod{2\pi i})$  на  $\tilde{M}$ .

При  $j = 0$  мы пересекаем эту цепь с малым сдвигом  $c_\varepsilon$  лежандровой кривой  $c_0$  в направлении, всюду трансверсальном контактными плоскостям, как в определении инварианта Беннекена.

Как и в случае  $i = 0$ , имеется симметрия  $L_j = L_{-j}$  ( $= L_{i-j}$ ).

**Замечание.** Индексы самозацепления  $L_j$  кривой индекса  $i \neq 0$  можно определить как усредненные индексы самозацепления бесконечных кривых, накрывающих данную в универсальном накрывающем пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Числа  $L_j$  при  $i \neq 0$  не инвариантны при гомеоморфизмах пространства  $\tilde{M}$  (поскольку такие гомеоморфизмы могут закручивать «тор на бесконечности», изменяя класс проекции кривой  $c_0^*$  в этот тор).

Э. Жиру доказал, что такое не может произойти для контактоморфизмов этого пространства (сохраняющих коориентации контактных плоскостей и пространства  $H^1(\tilde{M})$ ). Я не знаю, связна или нет группа контактоморфизмов полнотория.

**Определение.** Многочленом зацепления лежандровой кривой в  $M$  называется выражение

$$L(t) = \sum L_j t^j.$$

Этот многочлен принадлежит групповому кольцу циклической группы  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ , где  $i$  — индекс кривой. Таким образом, при  $i \neq 0$  эта сумма содержит (не более)  $i$  слагаемых.

**Теорема (см. [9]).** Индексы зацепления связаны с инвариантом  $J^+$  тождеством

$$J^+ + L(1) = 1.$$

## § 2.5. Вычисление коэффициентов зацепления

**Случай 1. Лежандровы кривые нулевого индекса.** Обозначим через  $X$  множество точек самопересечения фронта и через  $X_j$  ( $j > 0$ ) — множество тех точек самопересечения, в которых модуль разности значений аргумента  $\varphi$  не превосходит  $2\pi j$ . Заметим, что эта разность корректно определена и не зависит от выбора одной из двух петель, на которые кривая разбивается точкой самопересечения, поскольку суммарный индекс равен нулю.

**Теорема.** Коэффициенты зацепления  $L_j$  вычисляются по формуле

$$L_j = \sum_{X_j} \text{or}(>, <),$$

где  $j > 0$ , суммирование производится по множеству  $X_j$  и  $\text{or}(>, <)$  равно  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, совпадает или нет ориентация плоскости, задаваемая координатной системой  $(x, y)$ , с ориентацией, задаваемой парой (вектор, соответствующий большему значению  $\varphi$ ; вектор, соответствующий меньшему значению  $\varphi$ ).



Коэффициент самозацепления  $L_0$  равен

$$L_0 = \sum_x \text{or}(>, <) + \frac{\nu}{2},$$

где  $\nu$  — число точек возврата.

**Пример.** Вычисление многочлена  $L(t)$  для кривой нулевого индекса, имеющей три точки самопересечения, показано на рис. 2.4. За единицу измерения угла наклона коориентирующей нормали принято  $\frac{\pi}{2}$ , причем положительным считается направление вращения от положительной  $x$ -полуоси к положительной  $y$ -полуоси. Множества  $X_j$ ,  $j > 0$ , в этом примере пусты. Аналогичные вычисления приводят к ответам для других кривых, изображенных на рис. 2.4.

**Предупреждение.** При вычислении знака  $\text{or}(>, <)$  используется упорядочивание коориентирующих нормалей, но при определении того, какая из двух ветвей кривой является «>», а какая — «<», нужно образовывать реперы, состоящие из векторов, ориентирующих, а не коориентирующих ветви кривой.

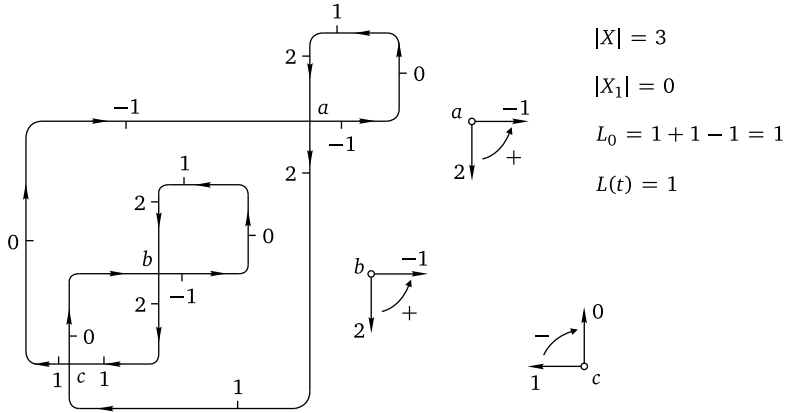
Это различие несущественно для фронтов без точек возврата, но становится решающим, когда число точек возврата на частях фронта между двумя посещениями точки самопересечения нечетно.

**Пример.** Имеется контактоморфизм пространства  $\mathbb{R}^3$ , переводящий лежандрову кривую, накрывающую «восьмерку», в лежандрову кривую, накрывающую «восьмерку в окружности» (четвертая кривая на рис. 2.4). Эту кривую можно соединить с «восьмеркой» путем, имеющим лишь одно опасное самокасание.

Для «восьмерки»  $L(1) = 1$ , в то время как для второй кривой  $L(1) = -1$ . Этот пример показывает, что числа  $L_j$  ( $j \neq 0$ ) и сумма  $L(1)$ , в отличие от инварианта Беннеке, не являются инвариантами контактного класса лежандрова цикла, накрывающего кривую нулевого индекса в плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Случай 2. Лежандровы кривые индекса  $i > 0$ .** Рассмотрим поднятие  $c_0$  данной кривой в  $\mathbb{R}^3$  и спроектируем часть этой кривой, соответствующую одному периоду, на плоскость  $(y, \varphi)$ . Эта проекция  $P_0$  будет продолжаться своим сдвигом  $P_0 + 2\pi i$  в  $\varphi$ -направлении. Отождествим точки  $(y, \varphi)$  и  $(y, \varphi + 2\pi i)$  и рассмотрим  $P_0$  и проекции  $P_j$  других возможных подъемов кривой ( $j = 0, 1, \dots, i - 1$ ) как кривые, лежащие на том же цилиндре.

Обозначим через  $X_j$  множество тех точек пересечения проекций  $P_0$  и  $P_j$ , для которых значение координаты  $x$  в точке, соответствующей кривой  $P_0$ , меньше, чем значение координаты  $x$  в точке, соответствующей кривой  $P_j$ . Пусть  $(x_<, x_>)$  — касательные векторы проекций в этих точках. Предположим, что координаты  $(x, y)$  выбраны



$$\begin{aligned}
 L \left[ \infty \right] &= 1, & L \left[ \text{figure-eight} \right] &= 1, & L \left[ \text{figure-eight with loop} \right] &= 1, \\
 L \left[ \text{figure-eight with crossing} \right] &= 1 - t - t^{-1}, & L \left[ \text{figure-eight with loop and crossing} \right] &= 1 - t - t^{-1}, & L \left[ \text{figure-eight with two loops} \right] &= 3 + t + t^{-1}, \\
 L \left[ \text{figure-eight with three loops} \right] &= L \left[ \text{figure-eight with four loops} \right] = L \left[ \text{figure-eight with five loops} \right] &= 3, & L \left[ \text{figure-eight with six loops} \right] &= 1 + \frac{|L|}{2}, \\
 L \left[ \text{figure-eight with seven loops} \right] &= 0, & L \left[ \text{figure-eight with eight loops} \right] &= 2, & L \left[ \text{figure-eight with nine loops} \right] &= 1 - t - t^{-1}.
 \end{aligned}$$

Рис. 2.4. Вычисление многочленов зацепления для кривых нулевого индекса

таким образом, что проекция  $P_0$ , а следовательно, и ее параллельный перенос  $P_j$  являются иммерсированными кривыми, единственными особенностями которых являются точки трансверсального самопересечения, и так, что все пересечения кривых  $P_j$  и  $P_k$  также трансверсальны (для достижения такой трансверсальности достаточно применить поворот плоскости на малый угол).

**Теорема.** Коэффициенты зацепления  $L_j$ ,  $0 < j < i$ , для кривой индекса  $i$  даются равенствами

$$L_j = \sum_{X_j} \frac{\text{or}(x_<, x_>)}{\text{or}(\varphi, y)}, \quad L_0 = \sum_X \frac{\text{or}(x_<, x_>)}{\text{or}(\varphi, y)} + m - \frac{\nu}{2},$$

где  $m$  — число максимумов ограничения функции  $y$  на  $P_0$ , а  $\nu$  — число точек возврата исходного фронта.

**Пример.** Для базисных кривых без точек возврата (рис. 1.4) имеем  $L[K_2] = 2 + t$ ,  $L[K_3] = 3 + t + t^2$ ,  $L[K_4] = 4 + t + t^2 + t^3$ , ...; вычисление для кривой  $K_2$  показано на рис. 2.5.

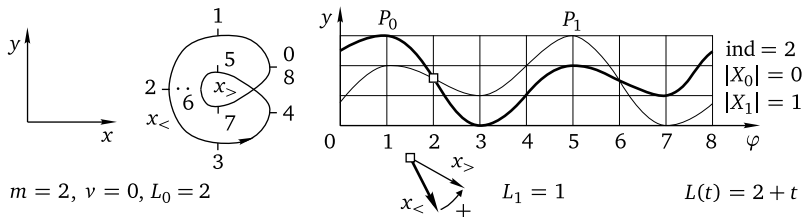


Рис. 2.5. Вычисление многочлена зацепления  $L[K_2]$

Для базисных кривых  $K_{i+1,k}$ , изображенных на рис. 2.3 ( $i \geq 0$  точек самопересечений,  $2k$  точек возврата), можно получить

$$L[K_{i+1,k}] = i + k + 1 + t + t^2 + \dots + t^{i-1}.$$

Вычисления (для  $i = 3, k = 2$ ) объяснены на рис. 2.6.

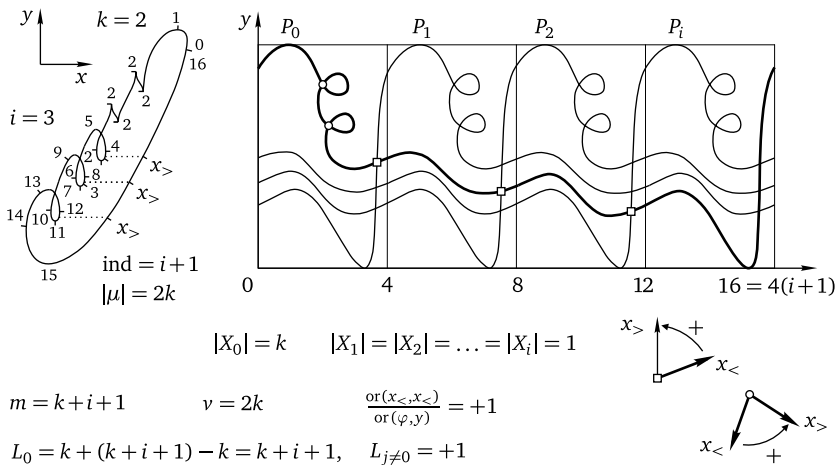


Рис. 2.6. Вычисление многочлена зацепления  $L[K_{4,2}]$

**Замечание.** Приведенный алгоритм применим и к кривым нулевого индекса, но алгоритм, использующий проекцию в  $(x, y)$ -плоскость, обычно существенно быстрее.

Таблица значений инвариантов  $|i|$ ,  $|\mu|$  и  $J^+$  для простейших фронтов (с двумя или менее точками самопересечений и двумя или менее точками возврата) приведена на рис. 2.7.

$i = 0$	$\mu = 0$	
	$\mu = 2$	
$i = 1$	$\mu = 0$	
	$\mu = 2$	
$i = 2$	$\mu = 0$	
	$\mu = 2$	
$i = 3$	$\mu = 0$	
	$\mu = 2$	
$i = 4$	$\mu = 0$	

Рис. 2.7. Таблица фронтов с  $\mu \leq 2, n \leq 2$

Мы начинаем с окружности, «восьмерки», простейшей кривой  $K_2$  индекса 2 и пяти кривых с двумя точками самопересечения, приведенных на рис. 1.6. Добавлением двух точек возврата окруж-

ность можно превратить в три различные кривые, «восьмерку» — в шесть кривых, а пять кривых, изображенных на рис. 1.6, порождают 16, 25, 25, 16 и 25 различных фронтов соответственно. Все эти 134 фронта представлены на рис. 2.7.

**Часть 2**

**Симплектическая  
и контактная топология  
каустик и волновых фронтов**

Одномерные каустики и волновые фронты доставляют специальные классы плоских кривых. Исследование их особенностей привело к созданию больших новых глав топологии, в том числе и к созданию описанной в первой части книги теории гладких иммерсий кривых.

## Глава 3

# Особенности каустик и теория Штурма

Здесь описывается удивительная связь геометрии каустик, при помощи которых Архимед сжег вражеские корабли, с теорией рядов Фурье, доставляющей мощное топологическое оружие для исследования каустик.

### § 3.1. Теоремы о четырех точках возврата и последняя геометрическая теорема Якоби

Начну с нескольких теорем, общим для которых является появление числа «четыре» в ответе. На первый взгляд не видно, что между ними общего.

Но в действительности все эти факты — проявления одного и того же топологического свойства лагранжевых и лежандровых особенностей в симплектической и контактной топологии фазового пространства механики и контактной структуры оптики и теории управления.

**Пример (последняя геометрическая теорема Якоби).** Рассмотрим выпуклую поверхность (например, поверхность эллипсоида) и точку на ней. Выпустим из этой точки геодезическую по некоторому направлению.

**Определение.** *Сопряженной точкой* (данной начальной точки) называется точка пересечения данной геодезической с бесконечно близкой к ней геодезической, выходящей из данной начальной точки (рис. 3.1).

Первой сопряженной точкой северного полюса сферы вдоль любой геодезической является южный полюс. Для поверхности общего положения (например, для эллипсоида) сопряженные точки вдоль разных геодезических различны.

**Определение.** *Каустикой* исходной точки называется кривая, образованная ее сопряженными точками (вдоль всех выходящих из исходной точки геодезических).

Якоби (в своих «Лекциях по динамике» [69]) заметил, что *каустика не может быть гладкой кривой. Каустика точки общего положения на поверхности общего положения обязательно имеет точки*





Рис. 3.1. Каустика точки на выпуклой поверхности

возврата. (В окрестности такой точки кривая диффеоморфна полукубической параболе  $y^2 = x^3$ .)

Эта теорема Якоби, доказанная им при помощи топологических соображений, явилась, по-видимому, исторически первым результатом «вариационного исчисления в целом».

Из топологических соображений ясно, что число точек возврата на каустике четно. Доказав это, Якоби замечает, что в случае эллипсоида это четное число всегда равно *четырем*.

Лекции Якоби опубликованы посмертно. Последняя статья в последнем томе собрания сочинений Якоби — неоконченное сочинение о точках возврата каустик. Оно сопровождается неуспешными (и довольно наивными) попытками учеников Якоби восстановить его рассуждения.

Насколько мне известно, утверждение Якоби о четырех точках возврата каустики на эллипсоиде так никогда и не было доказано.

Якоби проинтегрировал уравнение геодезических на эллипсоиде (в зэта-функциях от двух переменных). Таким образом, вопрос о числе точек возврата каустики, в сущности, относится к алгебраической геометрии.

Однако современная алгебраическая геометрия с ее уклоном в теорию чисел и с потерей интереса к реальным задачам, по-видимому, не в состоянии справиться с задачей Якоби. Верно ли утверждение Якоби о том, что каустики эллипсоидов имеют четыре точки возврата, неизвестно и сегодня. Не исключено даже, что численное интегрирование уравнений геодезических обнаружит контрпример (хотя это противоречило бы общему принципу минимальности топологических инвариантов алгебраических объектов).

Положение дел с четырьмя точками возврата каустик выпуклых поверхностей на сегодня следующее. Заметим прежде всего, что каустика имеет много компонент: первые сопряженные точки образуют первую каустику, вторые — вторую и т. д. Например, первая каустика северного полюса сферы — южный полюс, вторая — северный, третья — южный и т. д.

1. *Первая каустика имеет не менее четырех точек возврата.* Этот классический результат вариационного исчисления в целом вытекает из анализа топологии страта Максвелла — множества тех точек поверхности, которые соединены с исходной точкой более чем одной минимальной геодезической.

Для точки и поверхности общего положения страт Максвелла представляет собой дерево. Концевые точки этого дерева являются точками возврата каустики.

Всякое дерево имеет не меньше *двух* концевых точек. Из этого и следует существование не менее *четырёх* точек возврата первой каустики. А именно, рассмотрим расстояние вдоль геодезической от исходной точки до первой сопряженной точки как функцию на окружности выходящих из исходной точки направлений. Концевые точки дерева являются точками локального минимума этой функции на окружности. Она имеет не менее двух точек локального максимума. Эти точки тоже соответствуют точкам возврата первой каустики (они уже не являются концевыми точками страта Максвелла и, вообще говоря, вовсе ему не принадлежат).

Минимумы и максимумы нашей функции на окружности вместе и дают не менее четырех точек возврата первой каустики.

Недавно В. М. Закалюкин [16] исследовал топологию страта Максвелла для следующих каустик, но результаты здесь менее полны.

2. *Число точек возврата на  $n$ -й каустике не меньше четырех, если поверхность достаточно близка к сфере [40].* Близость здесь, однако, повышается с ростом  $n$ , так что для каждой конкретной поверхности получается лишь утверждение о конечном числе каустик.

**Гипотеза.** *Каждая каустика общего положения на каждой выпуклой поверхности положительной кривизны имеет не менее четырех точек возврата.*

Таким образом, гипотетически малость возмущения сферы не нужна. Однако даже для поверхностей, сколь угодно близких к сфере, не доказано присутствие не менее четырех точек возврата на каустиках *всех порядков одновременно.*

Вычисления по теории возмущений сводят задачу о точках возврата каустик на поверхностях, близких к сфере, к теореме Гурвица типа Штурма о рядах Фурье (см. § 3.2). Доказательство в работе [40]

переносит этот результат с бесконечно малых возмущений сферы на конечные.

**Пример (теорема о четырех вершинах).** *Вершиной* плоской кривой называется критическая точка кривизны. Классическая теорема о четырех вершинах [23] утверждает, что *выпуклая замкнутая кривая на плоскости имеет не менее четырех вершин*.

Например, для эллипса вершинами являются концы большой и малой осей.

На первый взгляд кажется, что теорема о четырех вершинах относится к римановой геометрии плоскости, но это не так. Стоит немного изменить риманову метрику плоскости, как результат станет неверным. Геодезическая кривизна подходящей кривой, сколь угодно близкой к окружности, на подходящей поверхности, сколь угодно близкой к плоскости, имеет всего две критические точки: максимум и минимум.

В действительности теорема о четырех вершинах, подобно теореме о четырех точках возврата каустик на поверхностях, относится к симплектической топологии. В частном случае римановой метрики справедливость теоремы о четырех вершинах восстанавливается, если определять вершины кривой следующим способом.

Выпустим из каждой точки нашей кривой геодезическую, перпендикулярную кривой и направленную во внутреннюю сторону. Точка пересечения такой нормальной геодезической с бесконечно близкой нормальной геодезической называется *сопряженной точкой* (вдоль исходной нормали). Все эти сопряженные точки образуют *каустик* исходной кривой (огигающую семейства геодезических нормалей).

Теорема о четырех вершинах (в римановом варианте) утверждает, что каустика имеет не менее четырех точек возврата.

В случае обычной евклидовой плоскости геодезические нормали — это обычные нормали. Сопряженные точки — это центры кривизны кривой. Множество сопряженных точек (каустика) называется в этом случае *фокальной кривой* исходной кривой. Например, фокальная кривая эллипса — это астроида (рис. 3.2). Астроида имеет четыре точки возврата. Теорема о четырех вершинах утверждает, что это не случайно: фокальная кривая любой выпуклой кривой должна иметь не менее четырех точек возврата (по топологическим причинам, которые обсуждаются ниже и принадлежат симплектической топологии).

В случае евклидовой метрики точки возврата каустики случайно соответствуют экстремумам геодезической кривизны. В общем римановом случае «настоящие» вершины не определяются метрикой по-

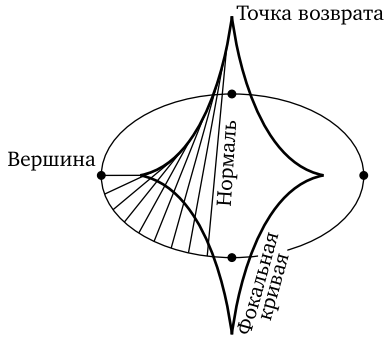


Рис. 3.2. Фокальная кривая эллипса

верхности вблизи исходной кривой, а зависят еще от метрики вблизи ее нормали.

**Пример (ларморовские окружности).** Рассмотрим движение заряженной частицы на евклидовой плоскости под действием перпендикулярного плоскости магнитного поля. Орбитой движения является ларморовская окружность кривизны  $\frac{B}{v}$  (где  $B$  — величина поля,  $v$  — длина вектора скорости).

Рассмотрим семейство ларморовских окружностей частиц, выходящих из начальной точки по всем направлениям с фиксированной энергией. Это семейство окружностей фиксированного радиуса, проходящих через одну точку.

Начальная точка является (бесконечно вырожденной) огибающей этого семейства.

Возьмем это семейство, заменив постоянную  $B$  на близкую к ней функцию общего положения на плоскости (или заменив евклидову метрику плоскости близкой ей метрикой общего положения).

Бесконечно вырожденная огибающая в исходной точке превратится после возмущения в замкнутую кривую (рис. 3.3).

**Теорема.** *Огибающая семейства возмущенных ларморовских орбит данной энергии имеет не менее четырех точек возврата.*

**Следствие.** *Для любой метрики и для любого магнитного поля общего положения огибающая семейства малых ларморовских окружностей (выходящих из одной точки с одинаковой и достаточно малой энергией), близкая к исходной точке, имеет не меньше четырех точек возврата.*

В частности, следствие применимо к семейству кривых большой постоянной геодезической кривизны римановой метрики общего положения на поверхности.

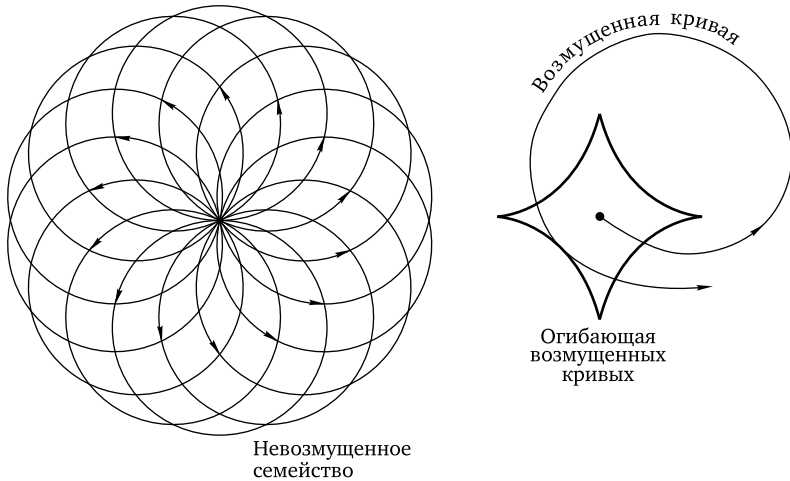


Рис. 3.3. Огибающая семейства ларморовских окружностей

Следствие выводится из теоремы при помощи изменения масштаба («разглядывания окрестности исходной точки в микроскоп»). Теорема непосредственно вытекает из того же факта симплектической топологии, что и теоремы о четырех точках возврата каустик из предыдущих примеров. Симплектическая геометрия объединяет все эти факты (и факты из нижеследующих примеров) в одну теорему, различными ипостасями которой являются теоремы из всех наших примеров.

**Пример (неголономные связи и каустики теории управления).** Рассмотрим поле двумерных плоскостей общего положения в трехмерном пространстве. В окрестности точки общего положения такое поле задается уравнением  $dz = y dx$  (в подходящих локальных координатах  $x, y, z$ ). Такие поля называются также *вполне неголономными связями, контактными структурами* или *распределениями Гейзенберга*.

Согласно известной теореме Рашевского из каждой точки общего положения можно добраться до каждой близкой точки малым путем, двигаясь так, чтобы скорость в каждый момент времени принадлежала плоскости поля.

Зафиксируем в пространстве риманову метрику общего положения и постараемся двигаться так, чтобы длина пути (или действие) была минимальной. Соответствующие экстремали, выходящие из каждой точки общего положения, образуют трехпараметрическое

семейство кривых. Огибающая этого семейства — поверхность, называемая каустикой исходной точки (рис. 3.4).

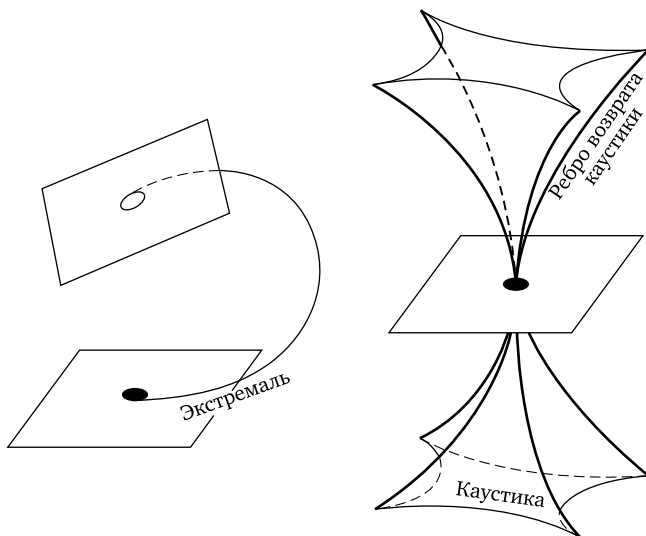


Рис. 3.4. Каустика управляемой системы

**Теорема (А. Аграчёв, [27]).** *Каустика точки общего положения — поверхность с четырьмя ребрами возврата полукубического типа, касающимися друг друга в исходной точке (где все четыре ребра перпендикулярны плоскости допустимых направлений в смысле исследуемой римановой метрики).*

Сечение каустики поверхностью, близкой к допустимой плоскости в исходной точке, имеет вид малой астроида (кривой с четырьмя точками возврата полукубического типа). Линейный размер этой астроида пропорционален степени  $\frac{3}{2}$  расстояния от секущей поверхности до допустимой плоскости вдоль нормали в исходной точке. Точки каустики, близкие к исходной точке, достижимы за очень большое время, так как движение по соответствующей экстремали очень медленное.

Теорема Аграчёва является обобщением теоремы о малой огибающей ларморовских окружностей, которая получается при специальном выборе римановой метрики (роль расстояния до допустимой плоскости играет в этом случае начальная энергия частиц).

**Пример (выворачивание волнового фронта).** Рассмотрим волновой фронт на плоскости, распространяющийся с единичной скоро-

стью внутрь эллипса. Система мгновенных положений фронта — это система *эквидистант* исходного фронта. Она изображена на рис. 3.5.

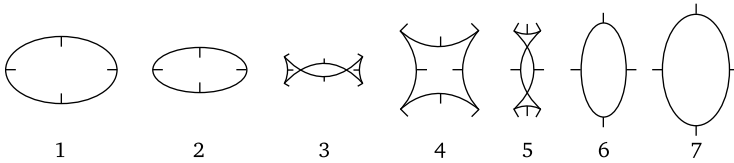


Рис. 3.5. Выворачивание эллипса наизнанку

Эквидистанты, достаточно близкие к исходному фронту, гладкие. Затем на фронте возникают четыре точки возврата (полукубического типа). После нескольких перестроек фронт вновь становится гладким, но распространяется уже наружу: он вывернулся наизнанку.

Явление выворачивания можно заметить уже для фронта, первоначально имеющего вид окружности. Но в этом случае переход от сжатия к расширению фронта происходит в момент полного коллапса фронта в точку. Коллапс фронта в точку — явление бесконечно выродженное, происходящее из-за чрезвычайной симметричности задачи.

Для исходного фронта и метрики общего положения выворачивание происходит не мгновенно, а проходя через несколько перестроек общего положения, подобных изображенным на рис. 3.5.

**Теорема** ([7], см. также § 4.1). *При выворачивании распространяющегося волнового фронта общего положения, первоначально не слишком далекого от сжимающейся окружности на евклидовой плоскости, в некоторый промежуточный момент образуется волновой фронт с не менее чем четырьмя точками возврата.*

**Замечание.** Из этого следует, в частности, что *типичное выворачивание сопровождается не менее чем четырьмя перестройками рождения или уничтожения пары точек возврата фронта* (на рис. 3.5 их ровно четыре: рождение двух малых треугольников на этапе 2–3 и затем смерть двух других на этапе 5–6).

Траектории точек возврата перестраивающейся системы фронтов образуют *каустика* семейства. Например, каустика системы эквидистант кривой на евклидовой плоскости — это в точности фокальная кривая исходного фронта. Рождение и смерть точек возврата фронтов соответствуют точкам возврата каустики. Предыдущее замечание означает, что *каустика системы выворачивающихся фронтов общего положения* (достаточно близкой к стандартному выворачиванию окружности) *имеет не менее четырех точек возврата.*

Теорема о выворачивании является в этом смысле обобщением теоремы о четырех вершинах.

**Замечание.** Вопрос о том, насколько сильно выворачивание может отличаться от стандартного, чтобы утверждение о четырех точках возврата промежуточного фронта оставалось верным, представляется очень интересным. На рис. 3.6 изображено выворачивание в однопараметрическом семействе общего положения фронтов на плоскости, для которого все фронты имеют не более двух точек возврата. Число рождений и уничтожений пар точек возврата в процессе выворачивания (число точек возврата каустики) в этом примере равно 2 (рождение на этапе 1–2, смерть на этапе 6–7).

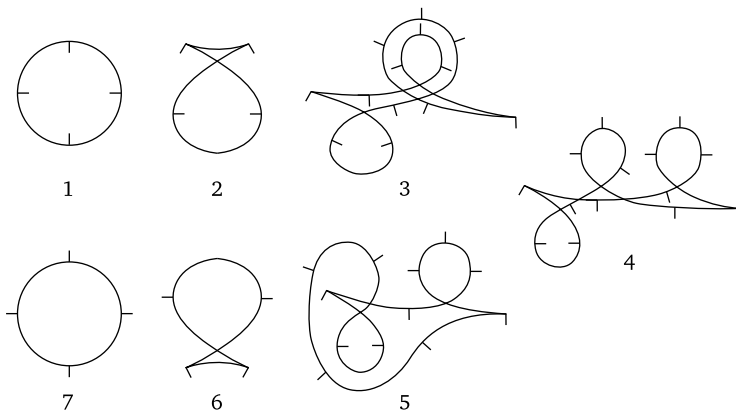


Рис. 3.6. Выворачивание фронта с не более чем двумя точками возврата

Явление этого рода невозможно в системе эквидистант. Действительно, между этапами 3 и 4 должна произойти перестройка мгновенного самокасания фронта, причем направления ориентирующих нормалей касающихся ветвей совпадают. Такое же самокасание должно произойти между этапами 4 и 5.

**Определение.** Касание с совпадением направлений ориентирующих нормалей называется *опасным*.

**Предложение.** В системе эквидистант гладкой кривой (или, более общим образом, в системе первоначально гладких волновых фронтов, распространяющихся в соответствии с уравнением Гамильтона—Якоби), опасное самокасание невозможно.

**Доказательство.** В соответствии с принципом Гюйгенса элементы распространяющегося фронта эволюционируют автономно (независимо друг от друга), подчиняясь гамильтоновой динамической си-



стеме (каноническим обыкновенным дифференциальным уравнениям Гамильтона). По теореме единственности опасное самокасание не может возникнуть в процессе эволюции первоначально гладкого фронта: если оно присутствует в какой-либо момент, то оно должно было бы присутствовать уже в начальный момент.

**Теорема (П. Пушкарь, Ю. Чеканов, 1999).** *В однопараметрическом семействе общего положения волновых фронтов на плоскости без опасных самокасаний, реализующем выворачивание гладкого замкнутого фронта, присутствует фронт с не менее чем четырьмя точками возврата.*

Эта теорема, несмотря на кажущуюся простоту формулировки, долгое время оставалась гипотезой, см. [39]. Доказательство Чеканова и Пушкаря далеко не элементарно, оно основано на теории контактных гомотопий — контактном варианте симплектических гомотопий Флоера.

Теорема близка к следующему утверждению.

**Теорема.** *Всякое однопараметрическое семейство общего положения плоских замкнутых кривых с двумя точками возврата, соединяющее кривые 2 и 6 (рис. 3.6), содержит фронт с опасным самокасанием.*

Попытки доказательства этой теоремы привели к построению теории инвариантов плоских кривых и волновых фронтов (см. [7, 37, 9, 39, 8, 91, 87, 26, 81, 80, 76, 30, 31, 32, 74, 54, 60, 50, 49]). Эта теория тесно связана с теорией инвариантов Васильева узлов [38], с квантовой теорией поля, интегральной геометрией, статистической физикой и алгебраической геометрией.

Инфинитезимальным вариантом всех предыдущих и многих последующих топологических теорем является описываемый ниже факт теории рядов Фурье и его обобщения.

### § 3.2. Теорема Гурвица—Келлога—Табачникова типа Штурма

Разложим  $2\pi$ -периодическую функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n \geq N} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

**Теорема (см. [86, 68, 71, 23]).** *Число нулей функции на окружности не меньше числа нулей первой гармоники, входящей в ее ряд Фурье с ненулевым коэффициентом:*

$$\#\{x \pmod{2\pi} : f(x) = 0\} \geq 2N.$$

При  $N = 1$  условие  $n \geq N$  означает, что функция  $f$  в среднем равна нулю, т. е. является производной некоторой функции на окружности:

$$f = \frac{dg}{dx}.$$

Утверждение теоремы в этом случае превращается в неравенство Морса для функций на окружности: *число критических точек функции  $g$  на окружности не меньше 2.*

При  $N = 2$  теорема утверждает, что *функция, ортогональная функциям  $1$ ,  $\sin x$  и  $\cos x$  на окружности, имеет не менее четырех нулей* (другая формулировка: *функция, ортогональная синусу и косинусу, имеет на окружности не менее четырех критических точек*).

Вычисления по теории возмущений показывают, что все топологические теоремы для приведенных выше (как и следующих ниже) примеров сводятся именно к этому частному случаю  $N = 2$  сформулированной выше теоремы для «бесконечно малых возмущений» стандартных интегрируемых примеров «коллапса» (для геодезических на маловозмущенной стандартной сфере, для плоских кривых, близких к евклидовой окружности, для малых возмущений стандартных ларморовских окружностей и т. д.).

Имеется много различных доказательств теоремы (допускающих также различные обобщения). Одно из самых коротких (и наименее понятных) доказательств — комплексное. Для простоты я приведу его для случая, когда  $f$  — тригонометрический многочлен<sup>1)</sup>:

$$f(x) = \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = \sum_{n \geq N} A_n z^n, \quad z = e^{ix}.$$

Индекс функции  $F$  на единичной окружности  $|z| = 1$  равен

$$\frac{\Delta \arg F(z)}{2\pi} = (\text{число нулей } F \text{ в круге } |z| \leq 1) \geq N.$$

Следовательно, число нулей вещественной части функции  $F$  на окружности не меньше  $2N$  (рис. 3.7), что и требовалось доказать.

Другое доказательство доставляется уравнением теплопроводности. Примем  $f$  за начальное условие и будем следить за временной эволюцией решения. Высшие гармоники затухнут быстрее, чем первая присутствующая в ряде Фурье с ненулевым коэффициентом. Поэтому начиная с некоторого момента времени число нулей решения будет в точности равно  $2N$ .

Между тем число нулей в процессе эволюции не увеличивалось (как это легко вывести из принципа максимума или его несложного обобщения). Следовательно, исходное число нулей не меньше  $2N$ .

<sup>1)</sup> Именно в этом случае теорема и была открыта Штурмом (1836); для общих гладких периодических функций ее доказал Гурвиц (1903).

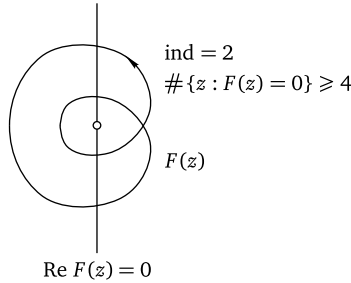


Рис. 3.7. Четыре нуля вещественной части кривой индекса два

Еще одно доказательство (проходящее для любой чебышёвской системы функций вместо тригонометрической системы) имеется в работе [41].

В простейшем (но как раз нужном нам сейчас) случае  $N = 2$  оно сводится к следующему. Предположим, что функция  $f$ , ортогональная единице, синусу и косинусу, имеет меньше четырех нулей. Тогда она меняет знак на окружности не более двух раз. Поэтому существует линейная комбинация  $l = a \cos x + b \sin x + c$ , меняющая знак в тех же точках, что и  $f$ . Произведение  $fl$  не меняет знака. Это противоречит ортогональности  $l$  и  $f$ . Поэтому  $f$  имеет не меньше четырех перемен знака.

**Пример (теорема о теннисном мяче).** Рассмотрим на сфере несамопересекающуюся замкнутую кривую, т. е. гладкое вложение  $S^1 \rightarrow S^2$ .

**Определение.** Вложение называется *точным*, если его образ делит сферу на две части равных площадей (рис. 3.8).



Рис. 3.8. Теорема о теннисном мяче

**Теорема ([7], см. также § 4.2).** Точно вложенная в сферу кривая имеет не менее четырех точек сферического перегиба (где кривизна кривой обращается в нуль).

Примером точно вложенной кривой является экватор. Все его точки являются точками сферического перегиба. Рассмотрим малое возмущение экватора. Оно, естественно, определяется вещественной функцией на экваторе (расстоянием от  $f$  до возмущенной кривой по нормали).

Точки сферического перегиба определяются (в первом приближении) из условия  $f'' + f = 0$ . Условие точности означает, что среднее значение  $f$  на окружности равно нулю. Поэтому существование не менее четырех точек сферического перегиба для бесконечно малых возмущений экватора вытекает из теоремы Гурвица.

Теорема о теннисном мяче утверждает, что результат остается верным и для конечных возмущений, даже очень больших: достаточно, чтобы точная кривая не самопересекалась. Возмущенная кривая не обязательно трансверсальна меридианам. Соответствующая ей функция на экваторе, вообще говоря, многозначна. Таким образом, теорему о теннисном мяче можно рассматривать как обобщение теоремы Гурвица на случай многозначных функций.

**Замечание.** Иммерсированная (т. е. самопересекающаяся) точная кривая на сфере может иметь всего лишь две точки сферического перегиба.

Точность иммерсированной в сферу площади  $4\pi$  окружности определяется так: интеграл формы площади по 2-цепи, ограниченной кривой, должен быть равен  $2\pi \pmod{4\pi}$ .

Пример точной иммерсии всего с двумя точками сферического перегиба (из [35]) изображен на рис. 3.9 (где  $A + C = B$ ).

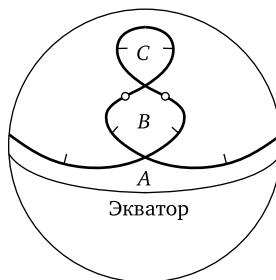


Рис. 3.9. Точная иммерсия с двумя точками сферического перегиба

**Определение.** Псевдофункцией называется точная иммерсия окружности в сферу, которую можно соединить с вложением экватора регулярной гомотопией в классе точных иммерсий, для которых никакая из входящих в гомотопию кривых не имеет замкнутой петли (отличной от всей кривой), ограничивающей кратную  $2\pi$  площадь.

**Замечание.** Отсутствие таких петель означает, что соответствующая лежандрова кривая в  $S^3$  является лежандровым узлом (не самопересекается), т. е. что лежандров тип узла, соответствующего продеформированной лагранжевой точной кривой в  $S^2$ , тривиален (такой же, как тип лежандрова узла, соответствующего экватору  $S^2$ ). Подробности см. в [8].

**Гипотеза.** Псевдофункция имеет не менее четырех точек сферического перегиба.

**Пример (теорема о четырех положениях равновесия).** Рассмотрим однородную пластину, ограниченную плоской выпуклой кривой. Следующий результат является классическим.

**Теорема.** Вертикально поставленная на горизонтальный стол пластина имеет не менее четырех положений равновесия.

Приведем эквивалентную формулировку.

**Теорема.** Из центра масс области, ограниченной выпуклой кривой на плоскости, можно опустить на кривую не менее четырех перпендикуляров.

*Доказательство.* Пусть  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  — декартовы и полярные координаты на плоскости с началом в центре масс. Пусть  $r = R(\varphi)$  — уравнение кривой в полярных координатах. Условие, что начало координат — центр масс, означает равенство нулю интегралов момента

$$I_x = \iint x \, dx \, dy, \quad I_y = \iint y \, dx \, dy.$$

Вычисляя эти интегралы в полярных координатах, мы находим

$$I_x = \iint r \cos \varphi r \, dr \, d\varphi = \int \frac{R^3}{3} \cos \varphi \, d\varphi, \quad I_y = \int \frac{R^3}{3} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Так как эти интегралы равны нулю, функция  $R^3$  ортогональна синусу и косинусу. По теореме Гурвица она имеет не менее четырех критических точек.

Значит, и функция  $R = R(\varphi)$  имеет на окружности не менее четырех критических точек, что и требовалось.

**Замечание.** Доказательство доставляет также многочисленные обобщения теоремы. Например, вместо выпуклости достаточна звездность области. Однородную плотность можно заменить (положительной) функцией от  $r$  и т. д.

**Пример (теорема о четырех точках уплощения).** Рассмотрим выпуклую кривую положительной кривизны на плоскости, лежащей

в трехмерном пространстве. Возмутим эту кривую так, чтобы получилась пространственная кривая. Возмущение предполагается здесь достаточно малым вместе с производными ниже третьего порядка.

**Теорема.** *Кручение возмущенной кривой обращается в нуль не менее чем в четырех точках.*

**Определение.** Точки, где кручение обращается в нуль, называются точками уплощения.

Следующее утверждение эквивалентно сформулированному.

**Теорема.** *Предположим, что проекция пространственной кривой на плоскость — вложенная выпуклая замкнутая кривая положительной кривизны. Тогда исходная кривая имеет не менее четырех точек уплощения.*

*Доказательство.* Точки уплощения переходят при проективных преобразованиях в точки уплощения, так как это точки необычно тесного касания кривой с соприкасающейся плоскостью.

Сжатие вдоль направления проектирования делает исходную пространственную кривую сколь угодно близкой к ее плоской проекции. Поэтому вторая теорема следует из первой.

Обратно, проекция слабо возмущенной выпуклой кривой положительной кривизны на исходную плоскость — выпуклая кривая положительной кривизны. Поэтому первая теорема следует из второй.

**Замечание.** Теорема о четырех вершинах плоской кривой следует из любой из сформулированных теорем о пространственных кривых.

Действительно, стереографическая проекция плоскости на сферу достаточно большого радиуса переводит исходную выпуклую кривую на плоскости в сколь угодно близкую к ней пространственную кривую. Точки уплощения полученной пространственной кривой являются образами вершин исходной плоской кривой (так как прообразы плоских сечений сферы — окружности на исходной плоскости). Полученная пространственная кривая имеет по меньшей мере четыре точки уплощения по сформулированной теореме. Значит, исходная плоская кривая имеет не менее четырех вершин. Обобщение классической теоремы о четырех точках уплощения на кривые в многомерных пространствах обсуждается в § 4.3 ниже.

**Пример (теорема Жиса о нулях шварцевой производной, [79]).** Проективная прямая  $\mathbb{R}P^1$  диффеоморфна окружности  $S^1$ . Рассмотрим гладкое отображение окружности на окружность как отображение проективной прямой на проективную прямую.

**Определение.** Точка называется *проективно стационарной* для отображения проективной прямой на проективную прямую, если шварцева производная отображения в этой точке равна нулю.

Иными словами, проективно стационарная точка отображения — это точка, в которой оно необычно хорошо аппроксимируется проективным отображением.

Проективные отображения прямой на прямую (дробно-линейные функции) образуют трехмерное многообразие. В каждой точке прямой-прообраза можно подобрать проективное отображение так, чтобы совпали с заданными значения функции и первых двух производных. Проективно стационарные точки — это те, в которых совпадают еще и третьи производные исходного отображения и его проективной (т. е. дробно-линейной) аппроксимации.

**Замечание.** Обычные стационарные (критические) точки функции — это точки, в которых приближение подходящей постоянной функцией правильно описывает не только функцию, но и ее первую производную.

**Теорема Жиса.** *Диффеоморфизм проективной прямой на проективную прямую имеет не менее четырех точек проективной стационарности.*

**Замечание.** «Инфинитезимальное» вычисление для малых возмущений тождественного (а значит, и любого проективного) отображения приводит после небольших вычислений к случаю  $N = 2$  теоремы Гурвица.

Поэтому теорему Жиса можно рассматривать как некоторое обобщение случая  $N = 2$  теоремы Гурвица.

**Замечание.** В. Овсиенко и С. Табачников [79] вывели теорему Жиса из теоремы о теннисном мяче.

**Замечание.** Как мне указал М. Э. Казарян, теорема Жиса допускает следующую переформулировку (с которой Жис, кажется, и начинал).

**Теорема.** *Замкнутая кривая на поверхности однополостного гиперболоида, пересекающая под ненулевыми углами по одному разу все его прямолинейные образующие, имеет в трехмерном проективном пространстве не менее четырех точек уплощения.*

*Доказательство эквивалентности.* Однополостный гиперболоид можно рассматривать как  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ , так как каждые две образующие разных семейств пересекаются в одной точке. График диффеоморфизма  $\mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ , рассматриваемый как кривая на поверхности гиперболоида, — то же самое, что замкнутая кривая, трансверсально

пересекающая по одному разу все прямолинейные образующие обоих семейств.

Плоские неособые сечения гиперboloида (не касающимися гиперboloида плоскостями) — это в точности графики проективных отображений. Точки уплощения графика — это в точности точки, где диффеоморфизм необычно тесно аппроксимируется подходящими проективными отображениями.

Поэтому число проективно стационарных точек диффеоморфизма равно числу точек уплощения его графика.

### § 3.3. Тригонометрические аппроксимации

Здесь мы рассмотрим еще одно приложение теоремы Гурвица типа Штурма в теории тригонометрических многочленов (или, более общим образом, чебышёвских систем).

Критическая точка функции — это точка, в окрестности которой подходящая постоянная дает аппроксимацию степени 2 или выше (так что погрешность аппроксимации меньше  $Ct^2$ , где  $t$  — расстояние до рассматриваемой точки, а  $C$  — постоянная). Аналогично определяется аппроксимация степени  $n$  функции  $f$  функцией  $p$  в точке  $x$ :

$$|f(y) - p(y)| \leq Ct^n, \quad t = |y - x|.$$

**Теорема А ([43]).** *Гладкая функция на окружности  $\{x \pmod{2\pi}\}$  допускает аппроксимацию порядка  $2n + 2$  тригонометрическими многочленами степени не выше  $n$  не менее чем в  $2n + 2$  точках.*

**Пример.** При  $n = 0$  это неравенство Морса: гладкая функция на окружности имеет не менее двух критических точек.

Нижеследующая теорема показывает, что наша теорема А является обобщением этого неравенства Морса на старшие производные. Пространство тригонометрических многочленов степени не выше  $n$  имеет размерность  $2n + 1$ . Поэтому аппроксимация тригонометрическим многочленом степени не выше  $n$  порядка  $2n + 1$  возможна в любой точке  $x$ .

Точки, в которых возможна аппроксимация тригонометрическими многочленами степени не выше  $n$  более высокой точности, называются  *$n$ -экстатическими* точками данной функции. Наша теорема утверждает, например, что число 1-экстатических точек функции на окружности не меньше четырех.

Эта четверка та же, что и во всех предыдущих примерах. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий алгоритм нахождения  $n$ -экстатических точек функции  $f$ .



**Теорема.** Точка  $x$  является  $n$ -экстатической для  $2\pi$ -периодической функции  $f$ , если и только если в этой точке обращается в нуль функция  $Lf$ , где  $L$  — дифференциальный оператор

$$L = \partial(\partial^2 + 1)(\partial^2 + 4)\dots(\partial^2 + n^2).$$

*Доказательство* (ср. [43] и [41]). Предположим, что  $f - p$  (где  $p$  — тригонометрический многочлен степени не выше  $n$ ) имеет в точке  $x$  нуль порядка выше  $2n + 1$ . Тогда  $L(f - p) = 0$  в точке  $x$  (поскольку порядок оператора  $L$  равен  $2n + 1$ ). Но  $Lp \equiv 0$ , так как  $\partial^2 + k^2$  уничтожает гармоники  $\sin(ky)$  и  $\cos(ky)$ . Значит,  $(Lf)(x) = 0$ .

Обратно, пусть  $(Lf)(x) = 0$ , а  $p$  — тригонометрический многочлен степени не выше  $n$ , аппроксимирующий  $f$  в точке  $x$  с порядком аппроксимации  $2n + 1$ . Тогда производные функции  $f - p$  до порядка  $2n$  включительно в точке  $x$  совпадают. Убедимся, что производные порядка  $2n + 1$  в точке  $x$  тоже совпадают.

Мы имеем  $L = \partial^{2n+1} + L'$ , где  $L'$  — оператор меньшего чем  $2n + 1$  порядка. Теперь мы получаем

$$L(f - p)(x) = \partial^{2n+1}(f - p)(x) + L'(f - p)(x).$$

Левая часть равна нулю ввиду условия  $(Lf)(x) = 0$ , так как  $Lp \equiv 0$ . Второе слагаемое справа равно нулю, так как производные меньшего чем  $2n + 1$  порядка функций  $f$  и  $p$  в точке  $x$  одинаковы. Значит, производные порядка  $2n + 1$  функций  $f$  и  $p$  в точке  $x$  совпадают, так что эта точка  $n$ -экстатическая. Теорема доказана.

*Доказательство теоремы А.* Функция  $Lf$  ортогональна всем гармоникам

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(nx), \sin(nx).$$

По теореме Гурвица она имеет не менее  $2n + 2$  нулей на окружности. Эти нули являются  $n$ -экстатическими точками для  $f$  по уже доказанной теореме. Теорема А доказана.

Мы видим, что  $n$ -экстатические точки являются обобщениями критических, только оператор первого порядка  $\partial$ , входящий в определение критической точки, заменяется оператором  $L$  порядка  $2n + 1$ .

**Замечание.** Наши две теоремы допускают много обобщений.

**Определение.** Система функций  $u_1, \dots, u_N$  называется *чебышёвской*, если число нулей любой их нетривиальной линейной комбинации (учитывая кратности) меньше чем  $N$ .

Тригонометрическую систему функций в наших двух теоремах можно заменить любой другой чебышёвской системой функций на окружности  $u_1, \dots, u_{2n+1}$ . Пусть  $L$  — дифференциальный оператор порядка  $2n + 1$ , имеющий эти функции в качестве фундаментальной

системы решений. Тогда  $n$ -экстатические точки  $x$  функции  $f$  (где она необычно хорошо аппроксимируется линейными комбинациями функций  $u_i$ ) определяются из уравнения  $(L^*f)(x) = 0$ , где  $L^*$  — сопряженный с  $L$  (по Лагранжу) оператор.

Оператор  $L^*$ , подобно  $L$ , имеет чебышёвскую фундаментальную систему решений. Функция  $L^*f$  имеет не менее  $2n + 2$  нулей по обобщенной теореме Гурвица (Келлога, Табачникова).

Аналогичные результаты имеют место и для чебышёвских систем из четного числа функций (точнее, для сечений расслоения Мёбиуса — единственного нетривиального одномерного вещественного расслоения над окружностью). Такие мёбиусовские функции можно рассматривать как антипериодические функции на двулистно накрывающей окружности,  $f(x + \pi) \equiv -f(x)$  (причем под числом нулей можно понимать число нулей на интервале  $[0, \pi)$ ).

Подробности см. в [41, 43]. Отсутствие приведенных выше теорем в литературе кажется мне удивительным. Теорема Штурма—Гурвица должна бы иметь в алгебраической геометрии и другие обобщения, в которых роль тригонометрических функций играют многочлены на плоской алгебраической кривой, заменяющей окружность  $x^2 + y^2 = 1$  (для которой  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ ).

### § 3.4. Лагранжевы пересечения в симплектической топологии

Чтобы объяснить топологический смысл описанных выше обобщении неравенств Морса для высших производных, начнем с обобщения обычных неравенств Морса на случай многозначных <sup>2)</sup> функций: с теории лагранжевых пересечений в простейшем случае функций на окружности.

Рассмотрим фазовое пространство, конфигурационным многообразием которого является окружность

$$S^1 = \{q \pmod{2\pi}\}.$$

Это фазовое пространство  $T^*S^1$  (пространство кокасательного расслоения окружности) представляет собой цилиндр

$$S^1 \times \mathbb{R} = \{q \pmod{2\pi}, p \in \mathbb{R}\},$$

снабженный формой действия  $\alpha = p dq$ .

<sup>2)</sup>Имеются в виду не замкнутые 1-формы, а настоящие многозначные функции с ветвлением, вроде  $\sqrt{x}$ .

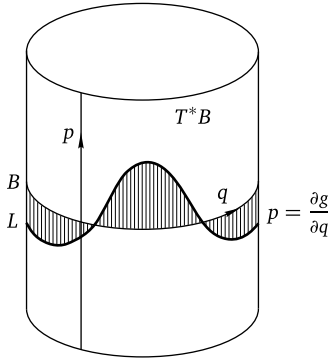


Рис. 3.10. Точное лагранжево сечение

Функции  $g$  на окружности сопоставляется кривая на цилиндре (рис. 3.10)

$$p = f(q), \quad f(q) = \frac{\partial g}{\partial q}. \quad (4.1)$$

Ориентированная площадь между этой кривой и экватором  $p = 0$  равна нулю.

**Определение.** Подмногообразие средней размерности  $n$  в пространстве кокасательного расслоения  $T^*B^n$  конфигурационного  $n$ -мерного многообразия, заданное функцией  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле (4.1), называется *точным лагранжевым сечением* расслоения.

С физической точки зрения точное лагранжево многообразие можно представить себе как потенциальное поле скоростей на  $B$  (если отождествить кокасательные векторы  $p$  с касательными  $\dot{q}$ , например, при помощи какой-либо римановой метрики на  $B$ ).

2-форма  $\omega = d\alpha$  ( $= \sum dp_i \wedge dq_i$ ) фазового пространства тождественно равна нулю на лагранжевом сечении (4.1), так как на нем  $\alpha = df$ .

**Определение.** Многообразие  $M^{2n}$ , снабженное замкнутой невырожденной в каждой точке дифференциальной 2-формой  $\omega$ , называется *симплектическим многообразием*. Диффеоморфизм одного симплектического многообразия на другое называется *симплектоморфизмом*, если он переводит одну из симплектических форм в другую.

**Пример.** Рассмотрим сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , вписанную в цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$  в трехмерном евклидовом пространстве.

**Лемма (лемма Архимеда).** *Отображение сферы без полюсов на цилиндрическую область  $|z| < 1$ , заданное горизонтальными лучами (рис. 3.11), выходящими из точек вертикальной оси  $z$ , является симплектоморфизмом.*

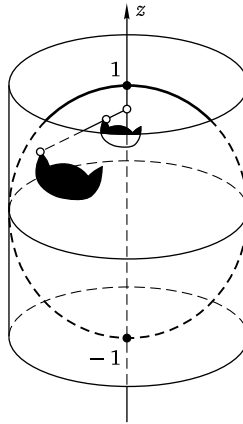


Рис. 3.11. Симплектоморфизм Архимеда

**Определение.** *Лагранжевым подмногообразием* симплектического многообразия  $(M^{2n}, \omega)$  называется подмногообразие средней размерности  $n$ , ограничение на которое симплектической 2-формы  $\omega$  обращается тождественно в нуль.

**Пример.** Всякая кривая на поверхности цилиндра  $T^*S^1$  лагранжева. Лагранжево подмногообразие  $L^n$  фазового пространства

$$(T^*B^n, \omega = d\alpha)$$

называется *точным*, если ограничение формы действия на него является полным дифференциалом некоторой функции,  $\alpha|_{L^n} = dS$ ,  $S: L^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Пример.** Вложенная в поверхность цилиндра  $S^1 \times \mathbb{R}$  замкнутая кривая точна, если и только если (ориентированная) площадь между этой кривой и экватором  $p = 0$  равна нулю:  $\oint p dq = 0$ .

Точное лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения  $T^*B^n$ , получающееся из нулевого сечения ( $p = 0$ ) регулярной гомотопией<sup>3)</sup> в классе точных лагранжевых подмногообразий, может рассматриваться как график производной *многозначной функции* на  $B^n$ .

Физически лагранжево многообразие — это многопотокное потенциальное течение. В таком течении через одну и ту же точку конфигурационного многообразия  $B$  могут одновременно проходить по

<sup>3)</sup> Регулярная гомотопия гладких отображений (вложений, иммерсий, т. е. вложений с самопересечениями) — это путь в соответствующем пространстве гладких отображений, соединяющий одно отображение с другим.

разным направлениям несколько потенциальных потоков. Эта ситуация реализуется в пылевидных средах или в звездных потоках и находит применение в астрофизике и в космологии.

Неравенство Морса для многозначных функций на окружности, задающихся точными лагранжевыми кривыми на поверхности цилиндра, — это следующий (очевидный) факт.

**Теорема.** *Точная вложенная в поверхность цилиндра замкнутая кривая пересекает экватор (нулевые сечения  $p = 0$ ) не менее чем в двух точках.*

*Доказательство.* В противном случае кривая была бы расположена в верхнем (либо в нижнем) полуцилиндре и интеграл от  $p \, dq$  вдоль нее был бы положителен (либо отрицателен).

В 1965 г. я предположил, что аналогичное «неравенство Морса» справедливо и для многозначных функций на любом многообразии (см. [35, 2]).

**Гипотеза (гипотеза о лагранжевых пересечениях).** *Точное лагранжево подмногообразие  $L^n$  фазового пространства  $T^*B^n$ , получающееся из нулевого сечения при помощи регулярной гомотопии в классе точных лагранжевых многообразий, пересекает нулевое сечение  $B^n$  в не меньшем числе точек, чем минимальное число критических точек гладкой функции на конфигурационном многообразии  $B^n$ .*

*В частности, число точек пересечения  $L^n \cap B^n$  для подмногообразия  $L^n$  общего положения не меньше, чем сумма чисел Бетти многообразия  $B^n$ .*

Эта гипотеза (а также аналогичные гипотезы из работ [35] и [2] для чисел неподвижных точек симплектоморфизмов, обобщающие «последнюю геометрическую теорему» Пуанкаре об отображениях кольца в себя, сохраняющих площади) была доказана для большинства встречающихся на практике многообразий: торов, произведений сфер и т. д.

Начиная с пионерской работы Конли и Цендера 1983 г. [52] этому вопросу посвящен целый ряд статей Шаперона, Лауденбаха, Сикоравы, Чеканова, Громова, Флоера, Хофера, Саламона, Гивенталья, Оно, Витербо и др. [55, 24, 73, 47, 57, 58, 59, 64, 78].

Быть может, наиболее известным следствием этой деятельности является теория «гомологий Флоера» трехмерных гомологических сфер (эйлерова характеристика этих гомологий — инвариант Кассона, см. [56, 44]).

Хотя первоначальная гипотеза в полном объеме и остается, насколько мне известно, не доказанной и не опровергнутой и сегодня, следствие, относящееся к числам Бетти, доказано (см. [47, 73]).

**Теорема.** Число точек пересечения точного лагранжева подмногообразия общего положения с нулевым сечением кокасательного расслоения компактного многообразия остается ограниченным снизу суммой чисел Бетти многообразия при деформации нулевого сечения, оставляющей его точным лагранжевым вложенным подмногообразием фазового пространства.

Эта теорема превращается в обычное неравенство Морса в случае малых (с производными) деформаций нулевого сечения, так как тогда продеформированное лагранжево многообразие остается точным лагранжевым сечением. Его точки пересечения с нулевым сечением — это критические точки соответствующей функции-потенциала, заданной на нулевом сечении.

Если же деформация не является малой, то продеформированное многообразие может и не быть сечением. В этом случае потенциал  $S = \int p dq$  оказывается однозначной функцией не на нулевом сечении, а лишь на продеформированном многообразии  $L$ . На нулевом же сечении его можно рассматривать лишь как многозначную функцию  $p(q)$ .

Точки пересечения продеформированного многообразия с нулевым сечением  $p = 0$  остаются критическими точками потенциальной функции  $S$  на  $L$ . Но у этой функции на  $L$  появляются также лишние критические точки (где  $p dq|_L = 0$ , хотя  $p \neq 0$ ). В этом случае обычное неравенство Морса для функций на  $L$  оценивает снизу лишь общее число интересующих нас критических точек (где  $p = 0$ ) и лишних критических точек. Сформулированная выше (и весьма нетривиальная) теорема утверждает, что неравенство Морса выполняется уже для одних лишь точек пересечения с нулевым сечением, без учета лишних критических точек.

Идея доказательства состоит в том, чтобы перестроить потенциальную функцию так, чтобы нужные нам критические точки остались, а лишние исчезли. Это достигается своеобразной «стабилизацией» — переходом к функциям на расслоенном над  $L$  многообразии большей размерности (к так называемым «производящим семействам»).

Сформулированные в предыдущих параграфах гипотезы находятся в таком же отношении к теореме Гурвица типа Штурма, в каком сформулированная выше теорема о лагранжевых пересечениях находит к теории Морса. До тех пор пока возмущенные объекты (метрики на сфере в задаче Якоби, пространственные кривые в теории уплощений и т. д.) остаются достаточно близкими к невозмущенным, оценки снизу для чисел точек возврата, точек уплощения и т. д. можно получить из теоремы Гурвица (прямо доставляющей эти оценки для бесконечно малых возмущений).

В случае больших возмущений оценку числа особенностей снизу иногда удается доказать (например, для теоремы о теннисном мяче), но в большинстве случаев она остается гипотетической (например, в случае псевдофункций).

### § 3.5. Лежандровы зацепления в контактной топологии

Пример на рис. 3.9 показывает, что для справедливости оценки числа особенностей снизу необходимы некоторые ограничения на деформации. На характер этих ограничений указывает теория точек пересечения точных лагранжевых иммерсий (самопересекающихся подмногообразий), в которой этот пример впервые и возник в 1965 г. [35].

При деформации точной лагранжевой кривой на поверхности цилиндра могут возникать самопересечения. Условие точности ( $\oint p dq \equiv 0$ ) имеет смысл и для иммерсированных подмногообразий (интегрирование ведется по любой замкнутой кривой на гладком отображаемом многообразии, а не на образе иммерсии — например, в случае иммерсированной лагранжевой кривой условие состоит в том, что интеграл вдоль всей кривой равен нулю).

На рис. 3.12 условие точности состоит в равенстве  $B = A + C$  для (положительных) площадей. Ясно, что иммерсированная точная лагранжева кривая в этом примере вовсе не пересекает нулевое сечение (хотя и получается из него регулярной гомотопией в классе точных лагранжевых иммерсий окружности в цилиндр).

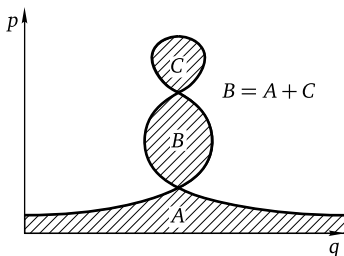


Рис. 3.12. Точная лагранжева иммерсия, не пересекающая нулевое сечение

Ю. В. Чеканов заметил, что подобный пример становится невозможным, если потребовать, чтобы в процессе деформации не менялся *лежандров* узел, соответствующий точному лагранжеву подмногообразию [24, 5]. Чтобы сформулировать соответствующее обобщение

теории Морса на многозначные функции, напомним следующие стандартные определения и обозначения.

**Определение.** Многообразием 1-струй  $J^1(B^n, \mathbb{R})$  функций на  $B^n$  называется многообразие  $M^{2n+1} = T^*B^n \times \mathbb{R}$  с контактной 1-формой  $dz - p dq$  (где  $p dq$  — форма действия на фазовом пространстве  $T^*B^n$ , а  $z$  — координата на  $\mathbb{R}$ ).

**Пример.** Если  $B^n = S^1$  — окружность, то многообразие  $J^1(B^n, \mathbb{R})$  диффеоморфно полноторию (внутренности  $S^1 \times \mathbb{R}$  двумерного тора). На этом многообразии имеются координаты  $(q \pmod{2\pi}, p, z)$ .

**Определение.** Лежандровым подмногообразием  $\Lambda^n \subset M^{2n+1}$  называется подмногообразие, на котором контактная 1-форма обращается в нуль.

**Пример.** Любой функции  $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}$  соответствует лежандрово сечение  $\Lambda^n$  расслоения  $J^1(B^n, \mathbb{R}) \rightarrow B^n$ , заданное формулами

$$p = \frac{\partial g}{\partial q}, \quad z = g(q). \quad (5.1)$$

Многообразие  $\Lambda$  зависит лишь от функции  $g$ , а не от выбора локальных координат: формула (5.1) сопоставляет точке  $q$  из  $B^n$  кокасательный вектор  $dg$  и число  $g(q)$ .

**Определение.** Вложенное лежандрово подмногообразие

$$\Lambda^n \subset J^1(B^n, \mathbb{R})$$

называется квазифункцией на  $B^n$ , если оно принадлежит компоненте связности нулевого сечения ( $p = 0, z = 0$ ) в пространстве вложенных лежандровых подмногообразий многообразия 1-струй функций на  $B^n$ .

Проекция квазифункции из пространства 1-струй в фазовое пространство (при естественном отображении забывания значения функции) является точным лагранжевым подмногообразием в  $T^*B^n$ .

Это подмногообразие может оказаться не вложенным, а лишь иммерсированным в  $T^*B^n$  (имеющим самопересечения).

Всякое точное лагранжево подмногообразие  $L^n$ , иммерсированное в  $T^*B^n$ , получается этим способом из некоторого лежандрова многообразия  $\Lambda^n$  в  $J^1(B^n, \mathbb{R})$  (определенного с точностью до сдвигов оси  $z$ , если  $L^n$  связно).

Лежандрово многообразие  $\Lambda^n$  может, однако, оказаться лишь иммерсированным (имеющим самопересечения в  $(2n + 1)$ -мерном многообразии струй  $J^1(B^n, \mathbb{R})$ ).

**Пример.** Кривая такого типа, как на рис. 3.12, является проекцией лежандровой кривой с самопересечением, если  $A = 0, B = C$  (т. е.



если петля, ближайшая к экватору  $p = 0$ , точна; разумеется, эта петля должна тогда не менее двух раз пересечь экватор).

При естественной деформации нулевого сечения в кривую, изображенную на рис. 3.12, в классе точных лагранжевых иммерсий в некоторый момент образуется именно такая ситуация самопересекающейся лежандровой кривой.

**Теорема (Чеканов, [24, 5, 25, 48]).** *Число квазикритических точек квазифункции общего положения на  $B^n$  (точек, где  $p = 0$ ) не меньше, чем сумма чисел Бетти многообразия  $B^n$ .*

**Пример.** Квазифункция на окружности имеет не менее двух квазикритических точек. Кривая, изображенная на рис. 3.12, вовсе не пересекает экватор  $p = 0$ . По теореме Чеканова для  $B^n = S^1$  эта кривая не является квазифункцией. Иными словами, лежандровы узлы этой кривой и лежандровой кривой ( $p = 0, z = 0$ ) в пространстве  $J^1(S^1, \mathbb{R})$  различны: при деформации одной в другую в классе лежандровых кривых неизбежно возникает момент самопересечения.

Уже этот очень частный — одномерный — случай теоремы Чеканова совершенно нетривиален. Элементарное комбинаторное доказательство этого факта исчисления площадей плоских самопересекающихся кривых неизвестно.

Псевдофункции из § 3.2 являются обобщениями квазифункций. Псевдофункция — это иммерсия окружности в  $S^2$ , а квазифункция — в цилиндр  $S^1 \times (-1, 1)$ . Отображение Архимеда (рис. 3.11) превращает квазифункцию в псевдофункцию. Из теоремы Чеканова следует, что полученная таким образом псевдофункция пересекает каждую окружность большого круга сферы не менее двух раз.

Аналогичным свойством обладает и любая псевдофункция.

**Теорема (Гивенталь, [61]).** *Всякая псевдофункция  $S^1$  на сфере  $S^2$  пересекает каждую окружность большого круга не менее двух раз.*

В действительности Гивенталь доказал многомерный аналог этой теоремы, в котором роль симплектической сферы  $S^2$  играет комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}P^n$ , а роль лагранжевой окружности  $S^1$  — вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$ . Одномерное комплексное проективное пространство — это сфера Римана  $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ , а вещественное — это окружность  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ .

Теорема Гивенталья показывает, что неравенства Морса сохраняют силу для многозначных функций на окружности, если понимать их как псевдофункции (а не только как квазифункции теоремы Чеканова). Можно надеяться, что и обобщение теоремы Гурвица (эта теорема соответствует теореме о теннисном мяче для точных инфинитезимальных возмущений экватора) сохраняет силу даже и для очень

больших возмущений, при которых роль функции на окружности играет псевдофункция на сфере. Эта гипотеза, впрочем, не доказана и для частного случая квазифункций Чеканова, являющихся самопересекающимися кривыми на поверхности цилиндра.

Вероятно, простейшим вопросом этого рода является следующий. Рассмотрим  $2\pi$ -периодическую по  $q$  функцию  $F(x, q)$ , равную  $x^2$  при больших  $x$ . Пусть уравнение  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  определяет на цилиндре

$$\{(x, q \pmod{2\pi})\}$$

вложенную гладкую кривую  $\gamma$ , гомотопную экватору  $x = 0$ .

Если  $F$  не слишком сильно отличается от  $x^2$ , то функция

$$p(q) = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{\gamma}$$

относительно  $q$  однозначна. В этом случае уравнение  $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2} + p = 0$  имеет не менее четырех решений  $q$ . Неизвестно, *остается ли этот результат в силе, когда функции  $x(q)$  и  $p(q)$  многозначны.*

**Замечание.** В отличие от теоремы о теннисном мяче, в большинстве других примеров топологических оценок числа особых точек снизу естественные ограничения (скажем, в терминах лежандровых узлов), аналогичные понятию псевдофункции, еще не сформулированы даже и в виде гипотез.

### § 3.6. Лагранжев коллапс и точки возврата каустик

В терминах симплектической геометрии теорема о четырех точках возврата каустики (применимая как к геодезическим на близких к сфере поверхностях, так и к вершинам плоских кривых и огибающим ларморовских окружностей) состоит в следующем.

Рассмотрим лагранжево многообразие в фазовом пространстве  $T^*\mathbb{R}^n$ , соответствующее (двухзначной) функции  $z = \pm|q|$ .

Это многообразие  $L^n$  состоит из векторов  $p = \pm \frac{q}{|q|}$  длины 1, приложенных к каждой точке  $q$  (направленных как радиус-вектор  $q$  или строго противоположно), и из всех векторов длины 1, приложенных в нуле.

**Лемма.** *Множество  $L^n$  представляет собой гладкое многообразие, диффеоморфное цилиндру  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ , и является точным лагранжевым подмногообразием фазового пространства.*

**Доказательство.** Диффеоморфизм  $S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow L$  задается формулами  $(p, t) \mapsto (q = pt, p)$ . Поэтому на  $L$  выполнены равенства  $p dq = p^2 dt = dt$ . Значит,  $L$  точно и  $t$  — соответствующий потенциал.

**Определение.** *Лагранжевым отображением* называется проектирование лагранжева подмногообразия фазового пространства на конфигурационное многообразие. *Каустикой* лагранжева отображения называется множество его критических значений.

Каустика лагранжева отображения общего положения — это гиперповерхность с особенностями в конфигурационном многообразии.

**Пример.** Каустика лагранжева отображения на двумерную поверхность общего положения — кривая, особенности которой — точки возврата полукубического типа и точки трансверсального самопересечения.

Лагранжево подмногообразие  $L^n \subset T^*\mathbb{R}^n$  из предыдущей леммы бесконечно вырожденно: его каустика представляет собой одну точку (прообразом которой является целая сфера критических точек  $S^{n-1}$ ).

**Определение.** Бесконечно вырожденное лагранжево отображение проектирования  $L^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *стандартным лагранжевым коллапсом*.

Стандартный лагранжев коллапс напоминает сжатие (антисигма-процесс, blowing down) алгебраической геометрии: это отображение является локальным диффеоморфизмом, двулистно накрывающим  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , а в начало координат коллапсирует целая сфера.

**Пример.** Рассмотрим на стандартной евклидовой сфере  $S^n$  геодезические, выходящие со скоростью 1 из северного полюса. отождествим их векторы скорости с касательными векторами сферы (при помощи ее римановой метрики). Мы получим лагранжево многообразие  $L^n$  в фазовом пространстве  $T^*S^n$ .

**Лемма.** *Лагранжево отображение  $L^n \rightarrow S^n$  имеет над каждым из полюсов особенность стандартного лагранжева коллапса.*

**Замечание.** Эквивалентность лагранжевых проектирований — это симплектоморфизм пространств расслоений, переводящий первое проектируемое лагранжево подмногообразие во второе и слою первого расслоения — в слою второго.

*Доказательство.* Рассмотрим функции «расстояние до полюса» на  $S^n$  и «расстояние до начала координат» в  $\mathbb{R}^n$ . Эти две функции локально диффеоморфны (так как их квадраты диффеоморфны по лемме Морса). Этот диффеоморфизм и индуцирует эквивалентность обоих лагранжевых отображений.

Рассмотрим теперь точное двумерное лагранжево многообразие общего положения, близкое (вместе с производными) к многообразию  $L$  стандартного лагранжева коллапса.

**Теорема ([40]).** *Каустика возмущенного лагранжева отображения имеет не менее четырех точек возврата.*

Точные условия малости возмущения, при которых теорема доказана в работе [40], формулируются ниже. По-видимому, большинство из этих условий не являются необходимыми. Можно, например, рассматривать возмущения, задаваемые потоком зависящего от времени гамильтонова векторного поля, у которого функция Гамильтона обращается в нуль вне некоторого шара. Соответствующие каустики могут иметь четыре неизбежные точки возврата.

Чтобы сформулировать условия на малость возмущения, удобно ввести в окрестности стандартного лагранжева цилиндра сферическую систему координат. Согласно общей теореме А. Вейнштейна [92] достаточно малая окрестность лагранжева многообразия в произвольном симплектическом многообразии симплектоморфна окрестности этого лагранжева многообразия в его собственном пространстве касательного расслоения (со стандартной симплектической структурой).

Как мы сейчас увидим, в качестве окрестности стандартного лагранжева цилиндра можно взять все дополнение к сечению  $p = 0$  касательного расслоения.

Рассмотрим для простоты случай  $n = 2$ . Определим отображение  $S^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$  формулами

$$\begin{cases} p_x = A \cos \varphi, & p_y = A \sin \varphi, \\ x = r \cos \varphi + B \sin \varphi, & y = r \sin \varphi - B \cos \varphi, \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $(r, A, B)$  — координаты в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \pmod{2\pi}$  — координаты в  $S^1$  и  $(x, y) = q$ ,  $(p_x, p_y) = p$  — координаты в  $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ .

Простые вычисления показывают, что

$$p_x dx + p_y dy = P_r dr + P_\varphi d\varphi, \quad (6.2)$$

где  $P_x = A$ ,  $P_\varphi = AB$ .

Следовательно, наше отображение (6.1) является симплектоморфизмом области  $P_r = A > 0$  в  $T^*(\mathbb{R} \times S^1)$  на область  $p \neq 0$  в стандартном симплектическом пространстве  $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ . Геометрический смысл довольно странных формул (6.1) и (6.2) обсуждается ниже в § 4.1 (для произвольного  $n$ ).

В координатах  $(\varphi, r, A, B)$  уравнение стандартного цилиндра имеет вид  $A = 1$ ,  $B = 0$ . Это задает сечение расслоения  $T^*(\mathbb{R} \times S^1)$  над  $\mathbb{R} \times S^1$ .

Возмущенный лагранжев цилиндр в новых координатах задается своей производящей функцией  $S(r, \varphi)$  (заданной на  $\mathbb{R} \times S^1$ ):

$$P_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}. \quad (6.3)$$

Производящая функция стандартного цилиндра имеет вид  $S = r$ . Условие малости возмущения, достаточное для доказательства теоремы о четырех точках возврата, состоит в «выпуклости»:

$$\frac{\partial S}{\partial r} > c_1 > 0$$

вместе с некоторыми граничными условиями для больших  $|r|$ . Достаточно, например, положить

$$S(r, \varphi) \equiv r \quad \text{при} \quad |r| > c_2$$

или

$$\|S - r\|_{C^2} < c_3.$$

Кроме того, если  $r - S = f(S, \varphi)$  и

$$H(S, \varphi) = S + f + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

то согласно работе [40] условие

$$H(S, \varphi) \rightarrow \pm \infty \quad \text{при} \quad S \rightarrow \pm \infty$$

достаточно для существования четырех точек возврата (точки возврата каустики соответствуют критическим точкам ограничения  $S$  на кривую  $H(S, \varphi) = 0$ ).

*Доказательство теоремы о четырех точках возврата.* Рассмотрим возмущенный цилиндр, заданный формулами (6.3).

Множество критических точек проекции на плоскость  $(x, y)$  задается уравнением

$$\det \begin{vmatrix} c + B_r s & s - B_r c \\ Bc + (-r + B_\varphi)s & Bs - (-r + B_\varphi)c \end{vmatrix} = 0,$$

где  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ .

Таким образом, уравнение кривой критических точек на возмущенном цилиндре имеет вид

$$-r + B_\varphi - BB_r = 0.$$

На ядре производной этой проекции дифференциалы  $dx$  и  $dy$  обращаются в нуль. Следовательно, согласно соотношениям (6.1)–(6.3) уравнение ядра имеет вид  $dS = 0$ .

При выполнении условий теоремы в качестве координат на цилиндре можно выбрать  $(S, \varphi)$  вместо  $(r, \varphi)$ . Частные производные

функций в координатах  $(r, \varphi)$  я буду обозначать нижними индексами  $(u_r, u_\varphi)$ , а в координатах  $(S, \varphi)$  — дробями  $(\frac{\partial u}{\partial S}, \frac{\partial u}{\partial \varphi})$  (означают производные фиксированных  $\varphi$  и  $S$  соответственно).

Я буду использовать также устаревшие координатные обозначения, когда функция на многообразии обозначается одним и тем же символом вне зависимости от того, какая используется система координат.

Выражение для  $r$  через  $S$  и  $\varphi$  можно переписать в виде

$$r = S + f(S, \varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial S} > -1,$$

где  $f = 0$  при  $|S| \geq c_4 > 0$ .

Дифференцируя, находим

$$dr = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial S}\right) dS + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) d\varphi.$$

Следовательно, согласно соотношениям (6.3) возмущенный цилиндр задается функциями

$$P_r = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial S}\right)^{-1}, \quad P_\varphi = -\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \left(1 + \frac{\partial f}{\partial S}\right)^{-1}.$$

Отсюда мы получаем следующее простое выражение для отношения  $\frac{P_\varphi}{P_r}$ :

$$B = -\frac{\partial f}{\partial \varphi} \Big|_{S=\text{const}}.$$

Окончательно уравнение кривой особых точек принимает вид

$$S + f(S, \varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.4)$$

Точки возврата каустики являются образами тех точек, в которых ядро (заданное уравнением  $dS = 0$ ) касается кривой особых точек. Таким образом, эти точки являются критическими точками ограничения функции  $S$  на кривую (6.4).

Кривая (6.4) гладкая, если  $L$  (или, что равносильно,  $f$ ) находится в общем положении.

**Лемма.** Пусть  $f(S, \varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая функция переменной  $\varphi$ , ограниченная вместе со вторыми производными на всей плоскости. Тогда ограничение функции  $S$  на гладкую кривую (6.4), лежащую на цилиндре  $\{S, \varphi \pmod{2\pi}\}$ , имеет не менее четырех критических точек.

*Доказательство.* Кривая состоит из замкнутых компонент, лежащих в кольце  $|S| \leq c_5$ . Если количество ее связанных компонент больше одного, то необходимые четыре критические точки доставляются максимумами и минимумами функции  $S$  на этих компонентах.

Если же имеется ровно одна компонента, то функция

$$H(S, \varphi) = S + f + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

положительна с одной стороны и отрицательна с другой стороны компоненты, которая разделяет области  $S \geq c_5$  и  $S \leq c_5$ .

Предположим, что количество критических точек меньше четырех. Тогда максимум (а также минимум) функции  $S$  на этой кривой достигается в единственной критической точке, а каждое значение между максимумом и минимумом функция принимает ровно в двух точках. Разница значений переменной  $\varphi$  в этих двух точках зависит от  $S$  непрерывно. Значение этой разницы в точках максимума и минимума отличается на  $2\pi$ . Поэтому найдется такое значение  $S_0$ , которое функция  $S$  принимает в двух противоположных точках  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \pmod{2\pi}$ . Знаки функции  $H(S_0, \cdot)$  на двух дугах окружности  $S = S_0$ , разделенных этими двумя точками, противоположны.

Следовательно, найдется функция вида

$$G = a \cos \varphi + b \sin \varphi,$$

имеющая при каждом  $\varphi$  тот же знак, что и функция  $H(S_0, \cdot)$ . Для этой функции мы получаем

$$\int_0^{2\pi} G(\varphi)H(S_0, \varphi) d\varphi > 0.$$

С другой стороны, функция  $f + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$  ортогональна функциям  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  для любого фиксированного значения  $S$  (поскольку оператор  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1$  убивает эти гармоники). Поэтому интеграл должен обращаться в нуль. Это противоречие доказывает, что число критических точек не меньше четырех.

Приведенное доказательство леммы основано, по существу, на том же трюке, что и доказательство обсуждаемой ниже теоремы Гурвица—Келлога—Табачникова.

Теорема о четырех точках возврата вытекает из леммы, поскольку критические точки функции  $S$  проектируются в точки возврата каустики для  $f$  (или  $L$ ) общего положения.

**Пример.** Возмутим евклидову метрику двумерной сферы. Геодезические, выходящие из северного полюса сферы, по-прежнему образуют в фазовом пространстве лагранжево точное многообразие над достаточно малой окрестностью южного полюса.

Полученное лагранжево проектирование является возмущением исходного. По теореме каустика имеет не менее четырех точек возврата.

Это же рассуждение применимо ко второй каустике (вблизи северного полюса), третьей (вблизи южного) и т. д. (но, разумеется, возмущение метрики должно быть тем меньше, чем выше номер каустики, чтобы возмущение лагранжева многообразия оставалось малым).

**Замечание.** Неясно, насколько малыми должны быть возмущения лагранжева цилиндра. Например, в частном случае задачи Якоби о геодезических на сфере достаточна положительность кривизны возмущенной метрики, а в задаче о четырех вершинах — выпуклость кривой. Условия эти можно, вероятно, значительно ослабить (в духе теоремы Чеканова из § 3.5).

**Замечание.** В многомерном случае вопрос о топологически необходимых особенностях маловозмущенного стандартного лагранжева коллапса не решен.

**Гипотеза (В. М. Закалюкин).** *Минимальный набор особенностей малых возмущений стандартного лагранжева коллапса реализуется нормальным отображением эллипсоида в евклидовом пространстве.*

Нормальное отображение подмногообразия (например, гиперповерхности) в евклидовом пространстве определяется следующим образом. отождествим касательные векторы с кокасательными при помощи евклидовой метрики. Все векторы, нормальные подмногообразию, определяют (точное) лагранжево подмногообразие  $L_0$  в фазовом пространстве  $T^*\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим образ  $L$  этого подмногообразия  $L_0$  под действием преобразования за время 1 в геодезическом потоке евклидова пространства:  $L = g^1 L_0$ .

**Определение.** Лагранжево проектирование  $L^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *нормальным отображением* для исходного подмногообразия.

**Пример.** Нормальное отображение для кривой на плоскости — это отображение цилиндра, образованного всеми нормальными кривой векторами, на плоскость, сопоставляющее каждому вектору его конец.

Каустикой нормального отображения для гиперповерхности является ее фокальное множество. Гипотеза Закалюкина утверждает, что фокальное множество эллипсоида реализует минимальный



набор топологически необходимых особенностей всевозможных лагранжевых проектирований, достаточно близких к стандартному лагранжеву коллапсу.

Например, фокальная кривая эллипса имеет четыре точки возврата. В этом случае гипотеза доказана. (В этом и состоит предыдущая теорема, доказываемая при помощи теоремы Гурвица типа Штурма о рядах Фурье.)

Фокальная поверхность эллипсоида в трехмерном пространстве имеет три ребра возврата.

В. М. Закалюкин [16] получил первые результаты о топологически необходимых особенностях возмущений лагранжева коллапса в размерности  $n > 2$ . Но, например, необходимы ли 3 ребра возврата, кажется, до сих пор неизвестно.

**Замечание.** Лагранжев цилиндр стандартного лагранжева коллапса можно продеформировать так, чтобы сохранить топологические свойства его бесконечно вырожденного лагранжева проектирования.

А именно, рассмотрим произвольный лагранжев цилиндр

$$L^n \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$$

в  $T^*\mathbb{R}^n$ , пересечение которого со слоем  $T_0^*\mathbb{R}^n$  представляет собой (квадратично) выпуклую гиперповерхность в этом евклидовом пространстве (причем касательные пространства цилиндра и слоя нигде не совпадают).

Теорема о четырех точках возврата каустики возмущения лагранжева коллапса в этой ситуации доказана М. Э. Казаряном [70].

## Глава 4

# Особенности волновых фронтов и теорема о теннисном мяче

Симплектическая геометрия четномерных многообразий и теория их лагранжевых подмногообразий и каустик имеет нечетномерный аналог: контактную геометрию, лежандровы подмногообразия и их волновые фронты. В этой главе описаны контактные версии материала предыдущих симплектических исследований.

### § 4.1. Лежандров коллапс и выворачивание фронтов

Теорема о четырех точках возврата выворачивающегося наизнанку волнового фронта на плоскости, подобно теореме об особенностях каустик, также допускает абстрактную формулировку в терминах *лежандрова коллапса* в контактной геометрии.

Рассмотрим многообразие коориентированных контактных элементов  $ST^*B^n$  многообразия  $B^n$ . Точкой этого  $(2n - 1)$ -мерного многообразия (*контактным элементом* на  $B$ ) является коориентированная гиперплоскость в касательном пространстве к  $B$  в какой-либо точке. Фиксировав на  $B$  какую-либо риманову метрику, мы можем задавать коориентированные контактные элементы ортогональными им векторами длины 1.

*Естественная контактная структура* (невырожденное поле касательных гиперплоскостей) многообразия  $M^{2n-1}$  контактных элементов на  $B^n$  задается следующим «условием конька»: контактный элемент имеет право вращаться и двигаться в принадлежащем ему направлении, но не в поперечном направлении. Иными словами, естественная контактная структура на  $M$  — это «тавтологическое» распределение гиперплоскостей: точка из  $M$  является гиперплоскостью в касательном пространстве к  $B$ , а прообраз этой гиперплоскости при естественной проекции  $M \rightarrow B$  и есть гиперплоскость тавтологического распределения в касательном пространстве к  $M$ .

**Определение.** Подмногообразие многообразия контактных элементов называется *лежандровым*, если оно является интегральным многообразием максимальной возможной размерности естественной контактной структуры на  $M$ .

Размерность лежандровых подмногообразий в  $M^{2n-1} = ST^*B^n$  равна  $n - 1$ .

**Пример.** Все контактные элементы на  $B$ , касающиеся одной гиперповерхности  $X^{n-1} \subset B^n$ , образуют лежандрово подмногообразие в  $M$ .

**Пример.** Для гладкого подмногообразия  $X^k \subset B^n$  любой размерности (даже размерности  $k = 0$ ) многообразие всех  $((n - 1)$ -мерных) контактных элементов на  $B^n$ , касающихся  $X$ , лежандрово.

**Определение.** Фронтом лежандрова подмногообразия

$$\Lambda^{n-1} \subset ST^*B^n$$

называется проекция  $\Lambda$  в  $B$ .

Фронт лежандрова подмногообразия общего положения является гиперповерхностью с особенностями в  $B$ .

**Пример.** Фронты лежандровых кривых общего положения на плоскости  $B = \mathbb{R}^2$  — это кривые с полукубическими точками возврата (возможно, самопересекающиеся).

**Определение.** Стандартным лежандровым коллапсом в  $\mathbb{R}^n$  называется лежандрово проектирование из  $ST^*\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  однопараметрического семейства лежандровых многообразий, образованных коориентированными касательными плоскостями сфер радиуса  $t \in \mathbb{R}$  с центром в точке  $0 \in \mathbb{R}$  (при  $t > 0$  коориентирующий вектор направлен наружу, при  $t < 0$  — внутрь сферы; значению параметра  $t = 0$  соответствует сфера, образованная всеми контактными элементами, приложенными в  $0$ ).

**Пример.** При  $n = 2$  стандартный лежандров коллапс определяет проектирование однопараметрического семейства лежандровых окружностей на плоскость. Фронты, соответствующие  $t \neq 0$ , являются окружностями на плоскости. Соответствующая значению параметра  $t = 0$  лежандрова окружность целиком отображается в одну точку. Этот фронт бесконечно вырожден.

При малом финитном (сосредоточенном в конечной области) возмущении семейства (в классе однопараметрических семейств лежандровых кривых) получится новое семейство, фронты которого при  $t > c$  — замкнутые несамопересекающиеся кривые, коориентированные направлением «наружу», а при  $t < -c$  — внутрь.

Промежуточным значениям параметра  $t$  отвечает «выворачивание» фронта. Для параметра  $t$  общего положения фронт — кривая с точками возврата и с точками самопересечения (при некоторых особых значениях  $t$  происходят еще и перестройки, в том числе перестройки рождения или уничтожения пар точек возврата фронта).

**Теорема (см. [7, 37, 39]).** Среди промежуточных фронтов всегда имеются фронты с не менее чем четырьмя точками возврата.

Для инфинитезимальных возмущений стандартного лежандрова коллапса этот результат сводится (после некоторых вычислений) к теореме Гурвица типа Штурма. Теорема утверждает, что он остается справедливым и для конечных возмущений.

*Доказательство.* Цилиндр, соответствующий стандартному лагранжеву коллапсу, вложен в многообразии контактных элементов плоскости  $ST^*\mathbb{R}^2$ . Я воспользуюсь контактоморфизмом этого многообразия в пространство  $J^1(S^1, \mathbb{R})$  1-струй функций на окружности.

Рассмотрим многообразии  $J^1(B^m, \mathbb{R})$  1-струй функций на гладком многообразии  $B$  размерности  $m$ . Размерность этого многообразия равна  $2m + 1$  (1-струя задается  $m$  координатами точки, значением функции в данной точке и  $m$  частными производными первого порядка в этой точке).

Естественная контактная структура задается следующим условием. Рассмотрим гладкую функцию  $f: B^m \rightarrow \mathbb{R}$ . 1-графиком функции называется многообразие ее 1-струй во всех точках многообразия  $B$ . 1-график функции на  $B^m$  диффеоморфен самому многообразию  $B^m$ .

Рассмотрим касательные плоскости ко всем 1-графикам функций, которые содержат данную точку пространства  $J^1(B^m, \mathbb{R})$ . Все эти  $m$ -мерные плоскости содержатся в одной гиперплоскости, касательной к  $J^1(B^m, \mathbb{R})$  в данной точке. Действительно, если  $q_i$  — локальные координаты на  $B^m$  в данной точке,  $p_i$  — частные производные и  $z$  — значение функции, то  $(p, q, z)$  образуют локальную систему координат на  $J^1(B^m, \mathbb{R})$ . При этом гиперплоскость задается уравнением

$$dz = p dq.$$

Следовательно, поле плоскостей, задаваемое этим уравнением на многообразии 1-струй, не зависит от выбранной системы координат. Это поле называется *естественной контактной структурой* многообразия 1-струй.

**Теорема.** Многообразие коориентированных контактных элементов евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  естественно контактоморфно многообразию 1-струй функций на единичной сфере  $S^{n-1}$  этого же евклидова пространства.

Эта простая геометрическая теорема (отсутствующая даже в лучших современных учебниках) является геометрическим обоснованием так называемого метода годографа в теории римановых инвариантов нелинейных уравнений в частных производных и опорной функции в геометрии выпуклых тел.

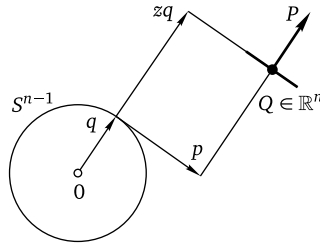


Рис. 4.1. Естественный контактоморфизм  $J^1(S^{n-1}, \mathbb{R}) \rightarrow ST^*\mathbb{R}$

Естественный контактоморфизм сопоставляет 1-струе функции, принимающей значение  $z$  в точке  $q$  на единичной сфере  $S^{n-1}$  и имеющей частные производные  $(p \cdot dq)$  (где  $p$  — касательный вектор сферы в точке  $q$ ), следующий ориентированный контактный элемент евклидова пространства. Точкой контакта является (рис. 4.1)

$$Q = zq + p \in \mathbb{R}^n,$$

а ориентирующая нормаль имеет вид

$$P = q.$$

Ясно, что это отображение является диффеоморфизмом, и простые геометрические соображения показывают, что оно переводит первую контактную структуру во вторую.

Лежандровы кривые, образующие цилиндр стандартного лагранжева коллапса, переходят под действием естественного контактоморфизма  $ST^*\mathbb{R}^2 \rightarrow J^1(S^1, \mathbb{R})$  в 1-графики постоянных функций на окружности (значение которых равно параметру  $t$ , нумерующему сжимающиеся и расширяющиеся фронты  $x^2 + y^2 = t^2$ ).

Следовательно, возмущенный цилиндр является объединением 1-графиков функций  $z = K(\varphi)$ ,  $p = K'(\varphi)$ , где функция  $K$  зависит от  $t$  как от параметра и совпадает или по крайней мере близка к  $t$  при достаточно больших  $|t|$ . Мне потребуется только условие  $K \rightarrow \pm\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Лемма.** Точки возврата фронта лежандровой кривой в  $ST^*\mathbb{R}^2$ , представленного в  $J^1(S^1, \mathbb{R})$  в виде 1-графика функции  $K$ , соответствуют нулям функции  $K + K''$  на  $S^1$ .

*Доказательство.* Слои лежандрова расслоения  $ST^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  представлены в  $J^1(S^1, \mathbb{R})$  1-графиками «первой гармоники»  $z = H_{x,y}(\varphi)$  вида  $H_{x,y}(\varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ , где  $x, y$  — некоторые константы. Критическими точками лежандровой проекции являются те точки, в которых проектируемая кривая касается слоев лежандрова расслоения.

1-график функции  $K$  касается 1-графика первой гармоники над некоторой точкой окружности, если производные порядков ноль, один и два у обеих функций в данной точке совпадают.

Поскольку для всякой первой гармоники во всех точках окружности выполняется равенство  $H + H'' = 0$ , в точках касания  $K + K'' = 0$ . Если в некоторой точке  $K + K'' = 0$ , то найдется гармоника  $H$ , принимающая в данной точке то же значение, что и  $K$ , и имеющая те же, что и у  $K$ , первую и вторую производные. В этом случае 1-график функции  $K$  касается 1-графика функции  $H$ . Лемма доказана.

Рассмотрим теперь среднее значение функции  $K$  как функцию, зависящую от параметра  $t$ . Из условия  $K \rightarrow \pm\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  вытекает, что при некотором промежуточном значении параметра функция  $K$  (а следовательно, и  $K + K''$ ) ортогональна постоянной функции.

Согласно теореме Гурвица—Келлога—Табачникова из § 3.2 для этого значения параметра функция  $K + K''$  (которая, как функция от  $\varphi$ , всегда ортогональна  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ ) имеет не менее четырех нулей. Тогда соответствующий этой функции фронт имеет не менее четырех точек возврата (для фронта, изображенного на рис. 3.5, их ровно четыре).

**Замечание.** В действительности доказательство показывает, что результат справедлив даже и для весьма больших возмущений (оценка их величины приведена в [7]). Гипотетически он остается верным и для очень больших возмущений. Важным ограничением является отсутствие самопересечений на всех лежандровых узлах в трехмерном многообразии  $ST^*\mathbb{R}^2 \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$ , составляющих продеформированное семейство лежандровых кривых (или даже составляющих все семейства, интерполирующие стандартное семейство с продеформированным). Не исключено, что это единственное нужное здесь ограничение (подобно ситуации в теореме Чеканова).

**Замечание.** Теории Закалюкина и Казаряна (см. § 3.6), несомненно, могут быть переформулированы и в терминах лежандровых коллапсов, но это, насколько мне известно, пока не сделано.

## § 4.2. Доказательство теоремы о теннисном мяче

В настоящее время я не могу доказать в наиболее общем виде приведенную выше «глобальную» гипотезу о существовании четырех точек возврата, но тем не менее имеются различные варианты теорем, доказанных в предыдущих двух параграфах, в которых условие малости возмущения может быть опущено.

**Теорема.** *Простая замкнутая сферическая кривая, разделяющая сферу на две части равных площадей, имеет не менее четырех точек перегиба.*

С теоремой из § 4.1 приведенная «теорема о теннисном мяче» связана следующим образом. Рассмотрим сферу  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , вписанную в цилиндр  $X^2 + Y^2 = 1$ . Спроектируем из начала координат цилиндр на поверхность сферы.

Рассмотрим график функции на окружности как кривую на цилиндре. Образом на сфере таких графиков являются простые замкнутые кривые, трансверсальные меридианам (и даже все такие кривые).

**Лемма.** *Точки перегиба спроектированной сферической кривой являются проекциями точек на цилиндре, в которых кривая имеет касание второго порядка с графиком гармоник первого порядка (т. е. точек, в которых  $K + K'' = 0$ , если кривая на цилиндре задана как график функции  $K$ ).*

Действительно, графики первых гармоник проектируются на сферу в окружности большого круга.

Семейство лежандровых кривых в  $ST^*\mathbb{R}^2$ , задающее стандартный лежандров коллапс, проектируется в семейство параллелей на сфере. Возмущенный лежандров коллапс проектируется в другое семейство кривых на  $S^2$ . Граничные условия при  $t \rightarrow \pm\infty$  означают, что это семейство соединяет кривую, близкую к маленькой параллели вблизи одного полюса, с подобной маленькой кривой вблизи другого полюса.

Если возмущение семейства не слишком велико, то его кривые гладкие и вложенные. Одна из этих кривых разделяет сферу на две части равных площадей. Поскольку эта кривая имеет не менее четырех точек перегиба, мы находим, что один из фронтов рассматриваемого возмущенного семейства фронтов на плоскости (возникающий в некоторый промежуточный момент при выворачивании фронта) имеет не менее четырех точек возврата. Таким образом, теорема из § 4.1 вытекает из теоремы о теннисном мяче.

С другой стороны, гипотеза, сформулированная в конце § 3.1, вовсе не вытекает из приведенных соображений, поскольку для больших возмущений стандартного лежандрова коллапса кривые на сфере могут иметь как точки возврата (как фронты лежандровой проекции), так и точки самопересечения.

Доказательство теоремы о теннисном мяче основано на простом факте проективной топологии: всякая локально строго выпуклая связная кривая, вложенная в двумерную сферу, не пересекает некоторую большую окружность. Из этого утверждения, доказанного в работе [6], вытекает, что кривая лежит в аффинной плоскости

(являющейся дополнением к не пересекающей ее прямой на проективной плоскости).

**Замечание.** Аналогичный результат доказан в работе [6] и в старших размерностях, но только для замкнутых многообразий, в то время как локально выпуклая кривая может быть либо вложенной окружностью, либо вложенным отрезком.

Из этого утверждения вытекает следующая теорема.

**Теорема.** *Всякая замкнутая связная кривая, вложенная в двумерную сферу и имеющая не более трех точек перегиба, целиком лежит в некоторой открытой полусфере.*

Отсюда следует теорема о теннисном мяче, поскольку кривая, разрезающая сферу на две части равной площади, не может лежать в открытой полусфере.

Доказательство последней теоремы приведено ниже. Для простоты мы рассматриваем случай общего положения, когда имеется ровно две точки нулевой геодезической кривизны (причем оба перегиба невырождены).

Точки перегиба  $A$  и  $B$  (см. рис. 4.2) разбивают кривую на два локально выпуклых отрезка, соединяющие  $A$  и  $B$ . Эти отрезки выпуклы. Ориентации на сфере, задаваемые движением из  $A$  и  $B$  и направлением к центру кривизны, совпадают для обоих отрезков.

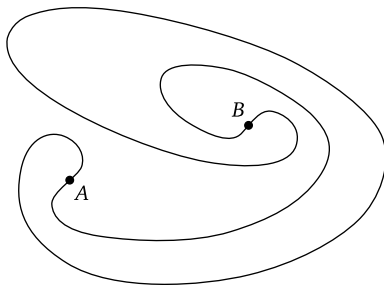
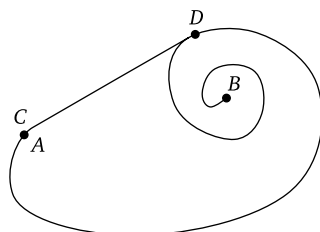


Рис. 4.2. Структура кривой с двумя точками перегиба

Согласно [6] каждый из этих двух искривленных отрезков принадлежит открытой полусфере. В действительности эту полусферу можно выбрать одной и той же для обоих отрезков.

Рассмотрим выпуклую аффинную кривую  $AB$  (рис. 4.3). Граница ее выпуклой оболочки состоит из выпуклой дуги  $CD$  и прямолинейного отрезка  $DC$ , соединяющего концы дуги (см. подробности в [6]). Точка  $C$  может совпасть с  $A$ , и  $D$  может совпасть с  $B$  (на рис. 4.3 точка  $C$  совпадает с  $A$ , но  $D \neq B$ ). Область, ограниченная кривой  $CDC$



Рис. 4.3. Выпуклая оболочка выпуклого отрезка  $AB$ 

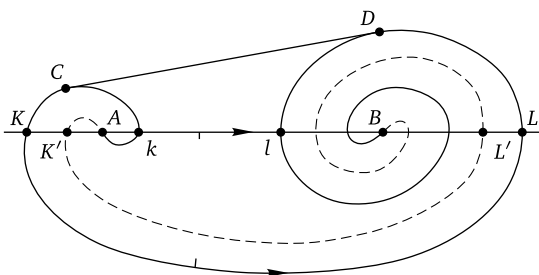
на аффинной плоскости, задает на исходной сфере область, содержащую интервал  $AB$  большой окружности длины  $\pi$ . Мы будем называть эту область *сферической выпуклой оболочкой* выпуклого отрезка  $AB$  исходной сферической кривой.

Аналогичным образом определяется сферическая выпуклая оболочка второго отрезка  $AB$  на исходной сферической кривой.

**Лемма.** *Одна из построенных выше сферических выпуклых оболочек содержится в другой.*

Теорема следует из леммы, поскольку даже бóльшая из двух сферических выпуклых оболочек лежит в полусфере.

*Доказательство леммы*<sup>1)</sup>. Рассмотрим аффинную кривую  $AB$ . Прямая  $S$ , содержащая точки  $A$  и  $B$ , пересекает кривую  $AB$ . Пусть  $K$  и  $L$  — крайние из этих точек пересечения, т. е. отрезок, соединяющий концы дуги  $KL$  кривой, содержит все остальные точки пересечения кривой  $AB$  и прямой  $S$  (рис. 4.4).

Рис. 4.4. Южные кривые  $KL$  и  $K'L'$ 

Пусть  $k$  и  $l$  — следующие точки пересечения кривой  $AB$  и прямой  $S$  (дуги  $Kk$  и  $Ll$  могут быть пустыми; в таком случае положим  $K = k$  и/или  $L = l$ ). Замкнутая кривая  $KkllK$  ограничивает область,

<sup>1)</sup> Автор благодарит М. Шапиро и В. Седых, которые обнаружили и исправили ошибку в первоначальном доказательстве этой леммы.

которая содержит аффинную кривую  $AB$  и отрезок  $AB$  аффинной прямой  $S$ . Эта область задает область  $X$  на сфере.

Для второй дуги  $AB$  аналогичным образом определяется область  $X'$ . Легко увидеть, что одна из областей  $X, X'$  содержит другую.

Действительно, область примыкает к аффинной прямой вдоль отрезка (отрезка  $kl$  для области  $X$ ) с той же стороны, что и дуга  $KL$ . Назовем соответствующую полусферу *южной полусферой*, а кривую  $KL$  — *южной кривой*.

**Лемма.** Для обоих выпуклых криволинейных отрезков, на которые исходная сферическая кривая делится точками перегиба  $A$  и  $B$ , принадлежащими экватору, южная полусфера одна и та же.

*Доказательство.* Эта полусфера лежит с той стороны отрезка  $AB$  экватора, для которой ориентация сферы, задаваемая направлением из  $A$  в  $B$  и направлением в сторону полусферы, противоположна ориентации, задаваемой направлением по выпуклой дуге из  $A$  в  $B$  и направлением в сторону центра кривизны.

Но мы знаем, что последняя ориентация одинакова для обоих выпуклых криволинейных отрезков  $AB$  (это, очевидно, выполняется в окрестности точки  $A$ , а значит, и всюду). Следовательно, «южные» полусферы, задаваемые обоими выпуклыми отрезками кривых, совпадают, что и доказывает лемму.

Южные дуги  $KL$  и  $K'L'$  не пересекаются, поскольку исходная сферическая кривая вложена. Следовательно, их концы на экваторе не чередуются, а значит, одна из коротких дуг экватора, проходящего через  $A$  и  $B$ , скажем  $KL$ , содержит другую, скажем  $K'L'$ . Отсюда следует, что весь выпуклый криволинейный отрезок  $AB$ , содержащий точки  $K'$  и  $L'$ , лежит в области  $X$  (на рис. 4.4 он показан пунктиром). Таким образом,  $X' \subset X$ , и, следовательно, сферическая выпуклая оболочка одного из криволинейных отрезков  $AB$  содержит сферическую выпуклую оболочку другого (детали аналогичны тем, которые можно найти в доказательствах в статье [6]).

Лемма, а вместе с ней и теорема о теннисном мяче доказаны.

**Замечание.** Можно построить фронт без самопересечений с четырьмя точками возврата, координированный меридианами на сфере и разделяющий сферу на две области равных площадей, у которого имеется лишь две точки перегиба (рис. 4.5).

Более того, существует однопараметрическое семейство общего положения координированных фронтов, соединяющих маленькую параллель вблизи северного полюса с маленькой параллелью вблизи южного, все фронты которого координированы направлением меридианов с юга на север и имеют не более двух точек перегиба (см. [7]).

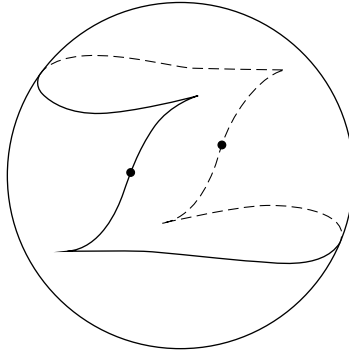


Рис. 4.5. Средняя кривая однопараметрического семейства фронтов, близких к параллелям, имеющая лишь две точки перегиба

Однако некоторые из лежандровых кривых, соответствующих фронтам семейства, не являются вложенными, и фронты испытывают опасные самокасания при некоторых значениях параметра.

Эти примеры не исключают справедливость следующей гипотезы. Пусть  $M^2$  — сфера  $S^2$  с выколотыми северным и южным полюсами.

Рассмотрим общее однопараметрическое семейство лежандровых вложений окружности в  $ST^*M^2$ , фронты которых соединяют параллель, близкую к южному полюсу, с параллелью, близкой к северному (оба фронта коориентированы направлением меридианов с юга на север).

Гипотетическое количество точек перегиба одного из фронтов семейства не менее четырех (и также гипотетически в семействе не менее четырех фронтов имеют точку двойного перегиба).

Мне не вполне ясно, являются ли условия, что фронты не вертикальны ни в одной точке и не проходят через полюсы, необходимыми для справедливости гипотезы.

### § 4.3. Пространственные кривые, их точки уплощения и теорема Мёбиуса

Все предыдущие теоремы о четырех особенностях были обобщениями случая  $N = 2$  теоремы Гурвица типа Штурма. Случай произвольного  $N$  (соответствующий  $2N$  особенностям) возникает при исследовании точек уплощения пространственных кривых.

Гладкое отображение общего положения  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  является (при  $m > 2$ ) вложением. Более того, для такого отображения про-

изводные порядков  $1, \dots, t - 1$  в каждой точке линейно независимы. Гиперплоскость, натянутая на эти векторы в точке кривой, называется *соприкасающейся*.

Производная порядка  $t$  в точке общего положения не лежит в соприкасающейся гиперплоскости. Однако для кривой общего положения в отдельных точках эта производная попадает в соприкасающуюся гиперплоскость. Такие точки называются *точками уплощения*.

**Пример.** Точки уплощения плоских кривых — это точки перегиба (где обращается в нуль кривизна). Точки уплощения кривых в  $\mathbb{R}^3$  — это точки, где обращается в нуль кручение. Для кривых общего положения эти нули — первого порядка.

Понятие точки уплощения проективное, так как уплощение — это пересечение необычно высокой кратности с соприкасающейся гиперплоскостью. Поэтому точки уплощения определены и для кривых в проективных пространствах.

*Пространственная кривая в  $\mathbb{R}^3$  имеет не менее четырех точек уплощения, если она близка (с производными) к выпуклой плоской кривой* (см. § 3.2). Близость с производными здесь и далее обязательна, так как спираль, лежащая на поверхности тонкого тора, осью которого является плоская выпуклая кривая, вовсе не имеет точек уплощения.

Чтобы сформулировать обобщение теоремы о четырех точках уплощения на кривые в (проективных) пространствах большего числа измерений, начнем с обобщения понятия выпуклости (следа [41]).

**Определение.** Вложение окружности в проективное пространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  называется *выпуклой кривой*, если число точек пересечения образа с любой гиперплоскостью не превосходит  $t$  (с учетом кратностей).

**Замечание.** Меньшее  $t$  число взять нельзя, так как через любые  $t$  точек кривой проходит гиперплоскость в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ .

**Пример.** Плоская замкнутая кривая в  $\mathbb{R}^2$  выпукла в смысле этого определения, если она является границей выпуклой области и имеет везде строго положительную кривизну.

**Пример.** Кривая (*обобщенный эллипс*) в  $\mathbb{R}^{2n}$ , заданная уравнениями

$$x_1 = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \dots, \quad x_n = \cos nt, \quad y_n = \sin nt \quad (t \pmod{2\pi}),$$

выпукла. Действительно, точки ее пересечения с гиперплоскостью определяются из уравнений  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  — многочлен степени  $n$ . По теореме Безу их число (с учетом кратностей) не превосходит  $2n$ .

Выпуклая кривая не имеет точек уплощения.

**Теорема (С. Анисов [34], М. Шапиро [84]).** *Всякая выпуклая кривая в четномерном пространстве  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$  не пересекает некоторую гиперплоскость. Такая кривая стягиваема и может быть реализована в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

*Выпуклая кривая в нечетномерном пространстве  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n-1}$  пересекает некоторую гиперплоскость в одной точке (под ненулевым углом). Такая кривая нестягиваема и не может быть реализована в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n-1}$ .*

**Пример.** Кривая в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n-1}$ , заданная однородными координатами  $x_1 = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , ...,  $x_n = \cos(2n-1)t$ ,  $y_n = \sin(2n-1)t$  ( $t \pmod{\pi}$ ), выпукла.

**Замечание.** Согласно М. Шапиро [34], выпуклые кривые в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$  образуют связное множество в пространстве вложений  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$ , а пространство выпуклых кривых в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n-1}$  имеет две связные компоненты в пространстве вложений (репер, образованный производными, ориентирует нечетномерное проективное пространство).

Теперь мы можем сформулировать многомерную теорему об уплощениях.

**Теорема ([41]).** *Рассмотрим малое пространственное возмущение выпуклой кривой, лежащей в гиперплоскости проективного пространства  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ .*

Возмущенная кривая имеет не менее чем  $m+1$  точку уплощения.

Доказательство (имеющееся в [41]) сводит теорему к теореме Гурвица типа Штурма для возмущений обобщенного эллипса и к ее обобщению для общего случая.

**Пример.** Лежащее в  $\mathbb{R}^5$  достаточно малое возмущение обобщенного эллипса в  $\mathbb{R}^4$  имеет не менее шести точек уплощения.

**Пример (теорема Мёбиуса, [77]).** Рассмотрим проективную прямую на проективной плоскости (рис. 4.6).

**Теорема.** *Достаточно близкая к проективной прямой замкнутая гладкая кривая имеет не менее трех точек перегиба.*

Этот результат, по-видимому, принадлежит Мёбиусу и тесно связан с открытием ленты Мёбиуса, из неориентируемости которой следует, что число точек перегиба всегда нечетно.

В действительности возмущения здесь могут быть весьма большими. Достаточно, например, чтобы продеформированная кривая оставалась нестягиваемой и несамопересекающейся (подробности см. в [6]).

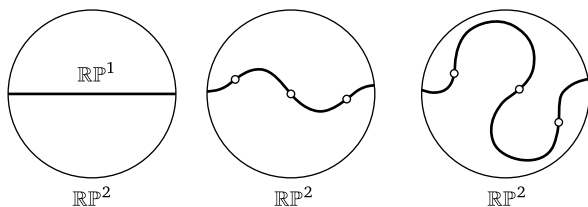


Рис. 4.6. Точки перегиба возмущения проективной прямой

Если самопересечения допускаются, то трех точек перегиба может и не быть (рис. 4.7), даже если иммерсированная кривая регулярно гомотопна вложенной прямой.

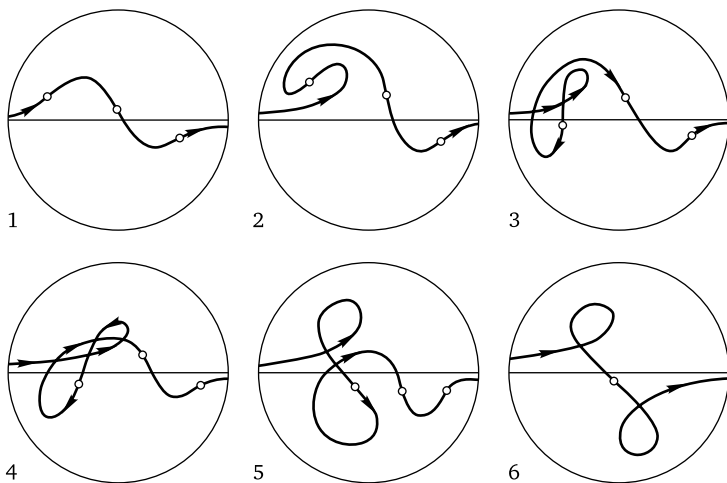


Рис. 4.7. Исчезновение пары точек перегиба при деформации иммерсии

**Гипотеза.** Три точки перегиба на иммерсированной кривой сохраняются до тех пор, пока при деформации не произойдет самокасания одинаково ориентированных ветвей (т. е. пока соответствующий лежандров узел не перестроится).

Недавно Д. Панов доказал эту гипотезу при дополнительном предположении, что ни одна из участвующих в регулярной гомотопии кривых не имеет более пяти точек перегиба, см. [19].

**Замечание.** Двойственная к исходной прямой кривая состоит из одной точки. Двойственная к возмущенной кривой кривая является фронтом лежандровой кривой (лежащей в пространстве неориентированных контактных элементов проективной плоскости  $PT^*\mathbb{R}P^2$ ).

Теорема Мёбиуса о трех точках перегиба утверждает, что *при возмущении точечного фронта возникает фронт с не менее чем тремя точками возврата*.

Эта теорема является неориентированным вариантом теоремы о лежандровом коллапсе. В случае неориентированных контактных элементов топологически необходимые особенности должны присутствовать на фронте *любого* малого индивидуального лежандрова возмущения слоя проецивизированного кокасательного расслоения  $PT^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

При каких естественных ограничениях на возмущения кривых в  $\mathbb{R}P^m$  сохраняет силу теорема о точках уплощения при больших значениях  $m$  — неизвестно (не сформулированы даже гипотезы типа теоремы Чеканова).

#### § 4.4. Вершины выпуклых пространственных кривых

В качестве следствия теоремы о точках уплощения пространственной кривой в нечетномерном евклидовом пространстве можно получить следующее многомерное обобщение теоремы о четырех вершинах для выпуклых кривых в пространстве предыдущей четной размерности.

**Определение.** *Вершиной* кривой в  $\mathbb{R}^m$  называется стационарная точка кривизны соприкасающейся сферы.

(*Соприкасающейся* называется сфера, к которой кривая находится ближе всего в данной точке, пересекая ее с кратностью, большей чем  $m$ . В вершине эта кратность еще больше.)

**Замечание.** При  $m = 2$  вершины — это стационарные точки кривизны кривой. При  $m > 2$  кривизна соприкасающейся сферы зависит не только от кривизны и кручений кривой, но и от их производных.

**Теорема (Р. Урибе [89]).** *Выпуклая кривая в  $\mathbb{R}^{2n}$  имеет не менее  $2n + 2$  вершин.*

Доказательство основано на следующей идее (см. работу В. Д. Седых [21], где из этой идеи извлекается другая информация). Подходящая стереографическая проекция пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  на сферу  $S^{2n}$  большого радиуса в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  делает нашу выпуклую кривую пространственным возмущением выпуклой кривой, лежащим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Эта пространственная кривая имеет не менее  $2n + 2$  точек уплощения.

**Лемма.** *Вершины исходной кривой переходят при стереографической проекции в точки уплощения пространственной кривой.*

**Доказательство.** Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой пересекает сферу большого радиуса  $S^{2n}$  по сфере  $S^{2n-1}$ .

Прообраз этой  $(2n - 1)$ -мерной сферы при стереографической проекции пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  на  $S^{2n}$  тоже является  $(2n - 1)$ -мерной сферой. Эта гиперсфера в  $\mathbb{R}^{2n}$  имеет необычно высокую кратность пересечения с кривой в  $\mathbb{R}^{2n}$ , если и только если кривая-образ в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  пересекает свою соприкасающуюся гиперплоскость с необычно высокой кратностью. Лемма доказана.

По лемме из существования  $2n + 2$  точек уплощения у возмущенной кривой в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  вытекает существование  $2n + 2$  вершин у невозмущенной кривой в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Замечание.** В теории выпуклых пространственных кривых (известной также под названием теории чебышёвских систем функций на окружности) много интересных фактов и открытых вопросов. Например, С. Анисов [1] доказал, что всякая выпуклая кривая в  $\mathbb{R}^{2n}$  имеет выпуклую проекцию в  $\mathbb{R}^{2n-2}$  и является проекцией выпуклой кривой из  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

Б. Хесин и В. Овсиенко, а также М. Казарян доказали, что кривая, проективно двойственная выпуклой, выпукла (см. [18, 41]), причем переход к проективно двойственной выпуклой кривой соответствует на языке дифференциальных операторов переходу к оператору, двойственному по Лагранжу.

Рассмотрим выпуклую кривую в  $\mathbb{R}P^{2n}$ . Плоскость  $\mathbb{R}P^{2n-2}$  называется *внутренней* по отношению к кривой, если каждая гиперплоскость, проходящая через нее, пересекает кривую в  $2n$  точках. Коэффициент зацепления  $\mathbb{R}^{2n-2}$  с кривой в  $\mathbb{R}^{2n}$  в этом случае равен  $n$ .

**Пример.** При  $n = 1$  внутренние точки — это точки выпуклой области, ограниченной кривой на плоскости.

Существование внутренних точек для многомерных выпуклых кривых недавно независимо доказали исходя из топологических соображений С. Анисов и С. Гусейн-Заде (см. [1]).

Прямая  $\mathbb{R}P^1$  называется *внешней* по отношению к выпуклой кривой в  $\mathbb{R}P^{2n}$ , если через каждую точку этой прямой проходит  $2n$  соприкасающихся гиперплоскостей кривой.

**Пример.** При  $n = 1$  внешние прямые — это все прямые, не пересекающие кривую на плоскости. Существование внешних прямых следует из существования внутренних точек для двойственной кривой.

Соприкасающаяся гиперплоскость выпуклой кривой в точке более ее не пересекает (так как кратность пересечения в одной этой точке уже достигает максимального возможного значения).

Для кривых на плоскости условие отсутствия лишних точек пересечения с соприкасающейся гиперплоскостью (т. е. с прямой) эквивалентно выпуклости. В пространствах большего числа измерений



это уже не так: С. Анисов [1] построил примеры невыпуклых кривых в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  ( $n \geq 3$ ), имеющих с каждой своей соприкасающейся гиперплоскостью ровно одну общую точку (кратности, равной размерности пространства).

**Теорема ([43]: уточнение гипотезы М. Казаряна).** *Проекция выпуклой кривой, лежащей в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  из не лежащего на кривой центра в пространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$  имеет не более  $t$  точек уплощения, причем существуют проекции, имеющие ровно  $t, t - 2, t - 4, \dots$  точек уплощения.*

*Доказательство.* Точки уплощения проекции получаются из тех точек кривой, для которых соприкасающаяся плоскость содержит центр проектирования. Двойственная центру гиперплоскость пересекает двойственную исходной кривой кривую по точкам, двойственным этим соприкасающимся плоскостям. Поскольку кривая, двойственная выпуклой, выпукла, число этих точек пересечения не превосходит  $t$ . Через любые  $t$  точек на двойственной кривой проходит гиперплоскость. Проекция из двойственного этой гиперплоскости центра имеет ровно  $t$  точек уплощения.

**Замечание.** Каждая выпуклая кривая (например, обобщенный эллипс) задает стратификацию двойственного проективного пространства (в соответствии с кратностями пересечений гиперплоскостей с кривой). Б. Шапиро доказал [83], что эта стратификация топологически (и комбинаторно) одинакова для всех выпуклых кривых. В. Закалюкин доказал (не опубликовано), что и с точностью до глобального диффеоморфизма проективного пространства эта стратификация не зависит от выпуклой кривой.

Даже в случае обобщенного эллипса нет хорошего описания компонент связности многообразия гиперплоскостей общего положения (дополнения к дискриминантной гиперповерхности в двойственном проективном пространстве, образованной не трансверсальными кривой гиперплоскостями). Неизвестно даже число этих компонент.

Можно предполагать, что все эти вопросы допускают достаточно простые ответы (вероятно, в терминах зеркал аффинных групп Вейля).

Близкая задача о топологической классификации вещественных тригонометрических многочленов также остается открытой (она соответствует стратификации линейных функций в  $\mathbb{R}^{2n}$  в зависимости от критических точек их ограничений на обобщенный эллипс).



*Числа компонент связности пространства вещественных тригонометрических многочленов степени  $n$  с  $2n$  различными критическими значениями образуют последовательность чисел тангенса  $1, 2, 16, \dots$*

Это верно для пространства всех периодических функций. См. [36], где также показано, что числа Эйлера (образующие вместе с числами тангенса последовательность  $K_n = 1, 1, 2, 5, 16, 61, \dots$  с экспоненциальной производящей функцией  $\sum \frac{K_n t^n}{n!} = \text{sect} + \text{tg}t$ ) считают компоненты пространств мёбиусовских функций общего положения на окружности.

Вопрос о топологической классификации вещественных тригонометрических многочленов тесно связан с вопросом об отображении Ляшко—Лойенги для этого случая, с топологической классификацией комплексных рациональных функций и с формулой Кэли для числа деревьев с нумерованными ребрами (см. [3, 75, 17, 88, 15, 53, 11, 13]). Тригонометрическим многочленам соответствуют рациональные функции с двумя полюсами и графы с одним циклом.

Будем называть *n*-графом связный граф с *n* ребрами и *n* вершинами, у которого обе вершины каждого ребра различны.

**Теорема.** *Топологические типы рациональных функций общего положения с двумя полюсами суммарной кратности *n* находятся во взаимно однозначном соответствии с *n*-графами с нумерованными ребрами.*

**Пример.** Существуют два 3-графа:  и . Первый имеет единственную нумерацию, а второй — три различные нумерации ребер. Итого четыре нумерации.

В соответствии с этим имеются четыре топологически различные рациональные функции с двумя полюсами суммарной кратности 3, с фиксированными критическими значениями. Под топологической эквивалентностью функций здесь понимается гомеоморфизм *h* пространства прообраза:  $f \sim g$ , если  $f(z) \equiv g(h(z))$ .

*Доказательство теоремы.* Соответствие между функциями и *n*-графами строится следующим образом (эта конструкция, близкая к идеям Гурвица, в полиномиальной ситуации принадлежит С. Здравковской [17]). Рассмотрим *n* критических значений  $c_1, \dots, c_n$  рациональной функции. Разобьем сферу значений на два гладких «диска» с «центрами»  $*$  и  $\infty$ , на общей окружности которых лежат критические значения.

Точка  $*$  — регулярное значение. Она имеет *n* прообразов. Эти точки будут вершинами нашего *n*-графа. Соединим базисную точку  $*$  с критическим значением  $c_i$  «радиусом» диска. При движении значения к критическому две точки прообраза сливаются, образуя исчезающий цикл критической точки. Соответствующие две точки прообраза базисной точки  $*$  соединены в *n*-графе *i*-м ребром. Мы получили

$n$ -граф с нумерованными ребрами (зависящий от выбора дисков и от нумерации критических значений).

Обратно, по  $n$ -графу с нумерованными ребрами (при фиксированных дисках и нумерованных критических значениях) можно восстановить рациональную функцию (с точностью до умножения аргумента на константу и преобразования  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , меняющего полюсы местами).

Для этого разрежем сферу-образ по «радиусам» внешнего «диска», соединяющим критические значения с точкой  $\infty$ , и склеим риманову поверхность из  $n$  экземпляров разрезанной сферы значений, отождествляя противоположные берега  $i$ -го разреза на листах, соответствующих концам  $i$ -го ребра  $n$ -графа.

**Лемма.** *Полученная в результате склейки поверхность является сферой. Число прообразов точки  $\infty$  на ней равно 2.*

*Доказательство.* Это следует из того, что сфера — единственная ориентируемая связная поверхность с положительной эйлеровой характеристикой. Обозначим число прообразов точки  $\infty$  через  $k$ . Рассмотрим на сфере-образе  $n$  ребер, соединяющих критические значения с точкой  $\infty$ ,  $n + 1$  вершину (точка  $\infty$  и критические значения) и область, остающуюся после разрезания.

Полный прообраз на построенной поверхности содержит  $n^2$  ребер,  $k + n(n - 1)$  вершин и  $n$  областей. Эйлерова характеристика построенной поверхности равна, таким образом,  $k$ . Но  $k$  положительно, а эйлерова характеристика поверхности рода  $g$  равна  $2 - 2g$ . Следовательно,  $k = 2$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Мы получили, между прочим, топологическое доказательство чисто комбинаторного факта: *произведение  $n$  транспозиций множества из  $n$  элементов, заданное  $n$ -графом, состоит (при любом порядке сомножителей) ровно из двух циклов.*

Комплексная структура на построенной поверхности индуцируется комплексной структурой сферы-образа. По теореме Римана она стандартна: поверхность-прообраз является сферой Римана с комплексной координатой  $z$ . Ее естественное отображение на сферу-образ голоморфно. Поэтому оно задается рациональной функцией от  $z$ . Число прообразов точки  $\infty$  по лемме равно 2. Поэтому эта рациональная функция имеет ровно два полюса.

Выбирая на сфере-прообразе координату  $z$ , определенную лишь с точностью до дробно-линейного автоморфизма, мы можем перевести эти две точки-полюсы в  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Этими условиями координата  $z$  (а тем самым и рациональная функция) определяется с точностью до возможности умножить  $z$  на константу или поменять 0

и  $\infty$  местами (эти операции не меняют ни критические значения, ни топологический тип отображения).

**Замечание.** Числа  $N(n)$   $n$ -графов с нумерованными ребрами даются при малых  $n$  следующей таблицей:

$n$	2	3	4	5	6
$N(n)$	1	4	$39 = 27 + 12$	$472 = 256 + 216$	6900

Здесь указаны также числа  $N(p, q)$  типов функций с полюсами порядков  $p \geq q$ ,  $p + q = n$  (т. е. числа  $n$ -графов с нумерованными ребрами, для которых произведение соответствующих ребрам транспозиций в порядке, соответствующем нумерации ребер, имеет два цикла порядков  $p$  и  $q$ ). Например,  $N(1, 1) = 1$ ,  $N(2, 1) = 4$ ,  $N(3, 1) = 27$ ,  $N(4, 1) = 256$ .

**Теорема ([10]).** *Справедливы равенства*

$$N(p, q) = \frac{(p+q-1)!}{p!q!} p^p q^q \quad \text{при } p \neq q, \quad (4.1)$$

$$N(p, p) = \frac{(2p-1)!}{2(p!)^2} p^{2p} \quad \text{при } p > 1. \quad (4.2)$$

**Пример.** Имеем  $N(p, 1) = p^p$ ,  $N(p, 2) = 2(p+1)p^p$  при  $p \neq 2$ .

Эта теорема является своеобразным обобщением теоремы Кэли о нумерованных деревьях и может быть доказана подсчетом кратности соответствующего отображения типа Ляшко—Лоенги, аналогичным вычислениям в [3, 75, 14, 63].

**Замечание.** Вся эта комбинаторика приобретает более геометрический вид в следующей интерпретации С. Здравковской [17] (предвосхитившей «детские рисунки» Гротендика, но следовавшей идеям Гурвица).

Расположим наш  $n$ -граф на плоскости так, чтобы циклический порядок ребер, выходящих из каждой вершины (заданный ориентацией плоскости), совпадал с циклическим порядком соответствующих циклических значений на окружности «диска» с центром  $*$  (ориентированной как край этого комплексного диска).



Полученный плоский граф делит плоскость на две части, которые и соответствуют двум полюсам нашей рациональной функции. (Здравковская вместо графа рассматривает полный прообраз «диска» с центром  $*$ , который ретрагируется на наш граф.)

Кратность каждого полюса можно следующим образом вычислить по построенному плоскому графу с нумерованными ребрами. Рассмотрим одну из областей, на которые граф делит плоскость. Гра-

ница этой области состоит из ребер графа. Некоторые ребра входят в нее два раза. Например, ведущее в концевую вершину ребро входит в границу соответствующей области два раза подряд. Мы получаем в качестве границы циклически упорядоченную последовательность ребер (быть может, с повторениями).

Определим *угол* между двумя последовательными ребрами следующим образом. Пусть предыдущее ребро соответствует критическому значению  $a$ , а последующее — критическому значению  $b$ . Дуга с началом  $a$  и концом  $b$  на ориентированной окружности «диска» с центром \* разбивается критическими значениями  $c_i$  на некоторое число  $r$  дуг. Это число мы и назовем *углом* нашей области в точке соединения предыдущего и последующего ребер. Число  $r$  положительно и не превосходит  $n$  (оно равно  $n$ , только если предыдущее и последующее ребра совпадают). Легко проверяется следующий результат.

**Предложение.** *Кратность полюса, соответствующего данной области, равна сумме углов этой области, поделенной на  $n$ .*

**Пример.** Граф  имеет три нумерации: (0123), (0132), (0213). Соответствующие суммы углов (для той из областей, граница которой состоит из идущих в этом порядке ребер) равны соответственно  $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ,  $1 + 2 + 3 + 2 = 8$ ,  $2 + 3 + 2 + 1 = 8$ . Для дополнительной области суммы углов суть 12, 8, 8. Кратности полюсов (3, 1), (2, 2) и (2, 2) соответственно. Поэтому граф  вносит в  $N(3, 1)$  вклад 1, а в  $N(2, 2)$  — вклад 2.

Наши результаты можно интерпретировать как (нетривиальную) информацию о плоских  $n$ -графах.

Развитая выше теория может быть применена и к рациональным функциям с  $k > 2$  полюсами (которые при  $k > 3$  уже нельзя фиксировать). Это приводит к графам с  $n$  вершинами и  $d > n$  ребрами.

Однако рациональным функциям соответствуют при  $d > n$  не все нумерации ребер графа, а лишь некоторые. Действительно, пусть число циклов произведения транспозиций, соответствующего нумерации, равно  $k$ . Тогда эйлерова характеристика прообраза равна  $k + n - d$ , что может при  $d > n$  оказаться не равным 2.

**Пример.** Пусть  $n = 3$ ,  $d = 4$ . Имеется три связных графа с тремя вершинами и четырьмя ребрами. Они допускают  $13 = 6 + 4 + 3$  нумераций ребер. Из них 4 нумерации соответствуют рациональным функциям с тремя полюсами ( $k = 3$ ,  $\chi = 2$ ), а 9 — эллиптическим функциям ( $k = 1$ ,  $\chi = 0$ ). Возникающая классификация называется теперь теорией пространств Гурвица.

## § 4.5. Приложения в теории экстремальных точек плоских кривых

Речь идет о точках, в окрестности которых плоская кривая аппроксимируется алгебраическими кривыми степени  $n$  с большим порядком касания, чем обычно.

**Определение.** Точкой  $n$ -перегиба гладкой плоской кривой называется точка, в которой кратность пересечения кривой с подходящей алгебраической кривой степени не выше  $n$  необычно велика, а именно превосходит число

$$d(n) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

**Замечание.** Число  $d(n)$  — это размерность пространства плоских алгебраических кривых степени не выше  $n$ . В каждой точке гладкой кривой существует алгебраическая кривая степени не выше  $n$ , пересекающая данную кривую с кратностью не ниже  $d(n)$ .

**Пример.**  $d(1) = 2$ . Точки 1-перегиба — это обычные точки перегиба (нули кривизны).

**Пример.**  $d(2) = 5$ . Точки 2-перегиба — это точки, в окрестности которых кривая аппроксимируется коникой с погрешностью, не превосходящей  $Ct^6$  (где  $t$  — расстояние от точки).

Точки 2-перегиба называются поэтому *секстатическими*.

Д. Айзенбад предложил называть все точки  $n$ -перегибов кривой *экстатическими*, так как они являются необычно привлекательными для алгебраического геометра, изучающего кривую.

Классическим обобщением теоремы о четырех вершинах является следующая теорема.

**Теорема (ср. [66]).** *Плоская выпуклая кривая имеет не менее шести секстатических точек ( $6 = d(2) + 1$ ).*

Развитая выше теория позволяет исследовать вопрос о числе точек  $n$ -перегиба для плоских кривых, получающихся из алгебраических кривых фиксированной степени малыми возмущениями. Например, в эту схему укладывается теорема Мёбиуса о трех точках перегиба малых возмущений проективной прямой ( $3 = d(1) + 1$ ).

Результаты, однако, получаются несколько неожиданными (см. [43]).

**Теорема.** *Плоская кривая, достаточно близкая к окружности, имеет не менее восьми точек 3-перегиба. Существуют возмущения, имеющие ровно восемь невырожденных точек 3-перегиба.*

**Теорема.** *Плоская кривая, достаточно близкая к выпуклому овалу эллиптической кривой  $y^2 = p_3(x)$ , имеет не менее десяти точек*

3-перегиба. Существуют возмущения, имеющие ровно десять невырожденных точек 3-перегиба ( $10 = d(3) + 1$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим отображение Веронезе  $V_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^9$ , сопоставляющее точке  $(x, y)$  точку, координатами которой являются значения всех девяти одночленов степени от 1 до 3  $(x, y, x^2, xy, \dots, y^3)$ . Пусть  $C$  — эллиптическая кривая,  $C_0$  — ее выпуклый овал. Кривая  $V_3C$  лежит в (аффинной) гиперплоскости  $\mathbb{R}^8$  в  $\mathbb{R}^9$ , заданной уравнением кубической кривой  $C$ .

**Лемма.** Кривая  $V_3C_0$  выпукла.

*Доказательство.* Пересечение кривой  $V_3C_0$  с гиперплоскостью  $H$  в  $\mathbb{R}^8$  состоит из образов точек пересечения овала  $C_0$  с кубической кривой  $C'$ , соответствующей содержащему  $H$  восьмимерному аффинному пространству в  $\mathbb{R}^9$ .

По теореме Безу кубические кривые  $C$  и  $C'$  пересекаются не более чем в девяти точках. Но на овале  $C_0$  лежит четное число точек пересечения. Значит, их число не превосходит восьми, что и доказывает выпуклость кривой  $V_3C_0$ . Лемма доказана.

Рассмотрим теперь малое (с производными) возмущение овала. Образ возмущенной кривой при отображении Веронезе — кривая в  $\mathbb{R}^9$ , близкая к выпуклой кривой в  $\mathbb{R}^8$ . По теореме о точках уплощения этот образ имеет не менее десяти точек уплощения, где кривая необычно близка к своей соприкасающейся гиперплоскости. Эти точки и являются образами точек 3-перегиба при отображении Веронезе  $V_3$  (соприкасающаяся гиперплоскость как раз и определяет искомую аппроксимирующую кубическую кривую).

Пример возмущения с ровно десятью точками 3-перегиба построен в [43].

**Замечание.** Вопрос о числе точек  $n$ -перегиба для  $n > 3$  совершенно не исследован (даже для кривых, близких к прямой, к окружности или к алгебраической кривой степени  $n$ ).

## § 4.6. Многомерные обобщения теории Штурма

Хорошо известно, что прямолинейные попытки перенести теоремы о нулях линейных комбинаций собственных функций на многомерный случай оказываются неудачными (см., например, «теорему Германа» в [12]). Геометрические приложения теоремы Гурвица типа Штурма, описанные выше, подсказывают совершенно другие обобщения, приводящие, в частности, к гипотезам о сферических функциях, формулируемым ниже.

Начнем с многомерного аналога теоремы Мёбиуса о трех точках перегиба возмущения проективной прямой на проективной плоскости. Мы должны определить многомерный аналог точки перегиба плоской кривой.

Рассмотрим проективную плоскость  $\mathbb{RP}^2$  в проективном пространстве  $\mathbb{RP}^3$ . Все точки плоскости являются параболическими: вторая квадратичная форма в них вырождена (и даже равна нулю). Заметим, что понятие параболической точки на поверхности в проективном пространстве проективное: речь идет о характере касания плоскости и поверхности в точке. Параболические точки поверхности общего положения образуют гладкую кривую (рис. 4.8). Эта кривая делит поверхность на гиперболическую область (где имеется два вещественных асимптотических направления) и эллиптическую (где они комплексно-сопряжены). В параболических точках оба асимптотических направления совпадают. Параболическая линия поверхности общего положения оснащена гладким полем асимптотических направлений. В отдельных точках это асимптотическое направление вдобавок касается параболической кривой.

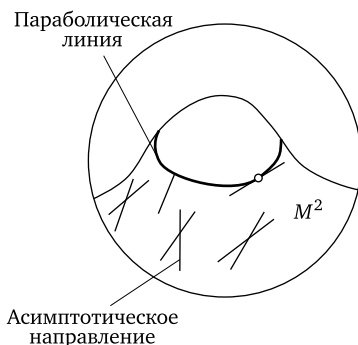


Рис. 4.8. Параболическая линия и асимптотические направления на поверхности

На двойственной поверхности, лежащей в проективно двойственном проективном пространстве, параболическая линия исходной поверхности общего положения соответствует ребру возврата. Это ребро возврата полукубического типа само имеет особые точки (точки возврата также полукубического типа). Они соответствуют точкам касания асимптотического направления исходной поверхности с ее параболической линией. Особенность двойственной поверхности в такой точке — обычный ласточкин хвост (рис. 4.9).

Аналогом точки перегиба плоской кривой является параболическая кривая поверхности в проективном пространстве, снабженная точками касания асимптотического направления с этой кривой. На



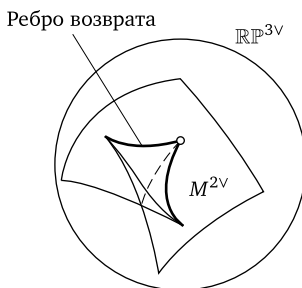


Рис. 4.9. Ласточкин хвост на ребре возврата двойственной поверхности

двойственной поверхности им соответствуют ребра возврата и ласточкины хвосты.

При попытке перенести теорему Мёбиуса о трех точках перегиба на эту ситуацию возникает вопрос: *какое минимальное число ребер возврата и какое минимальное число ласточкиных хвостов имеет двойственная поверхность маловозмущенной проективной плоскости в  $\mathbb{RP}^3$ ?*

Сейчас он уже решен Д. Пановым [20]: ребро может быть только одно.

Естественно начать с алгебраических возмущений минимальной возможной степени, т. е. с кубических поверхностей, близких к плоскости. Вопрос о числе ребер возврата и ласточкиных хвостов в этом случае решен Б. Сегре [82].

**Теорема.** *Число компонент параболической линии на вещественной кубической поверхности общего положения, гомеоморфной  $\mathbb{RP}^2$ , не меньше четырех, причем число ласточкиных хвостов на двойственной поверхности равно шести.*

**Замечание.** Вычислительные эксперименты Ф. Аикарди показали, что распределение шести ласточкиных хвостов по четырем ребрам возврата таково:  $6 = 0 + 1 + 2 + 3$  (рис. 4.10). Е. Шустин, которому я сообщил об этом наблюдении, доказал (используя метод Сегре) неизбежность именно такого распределения точек касания асимптотических направлений с параболической кривой. При этом оказывается, что четыре «овала» параболической линии стягиваемы на  $\mathbb{RP}^2$  и ограничивают там непересекающиеся диски.

**Гипотеза (Ф. Аикарди, Д. А. Панов, [20]).** *Число точек касания асимптотического направления с параболической кривой не меньше шести, а если оно равно шести, то число компонент параболической кривой не меньше четырех.*

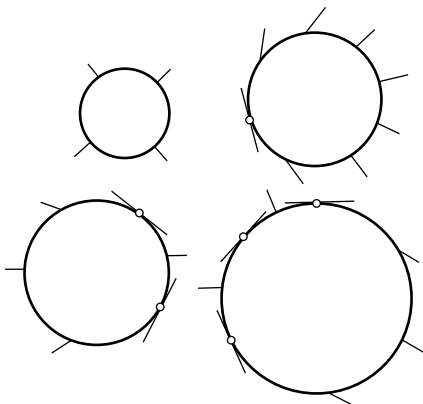


Рис. 4.10. Распределение особенностей по ветвям параболической кривой

Д. Панов [20] построил малое возмущение плоскости с всего одной компонентой параболической кривой, но в его примере 12 точек касания этой кривой с асимптотическим направлением.

Возмущения проективной плоскости естественно описывать при помощи рядов Фурье по нечетным сферическим гармоникам.

**Определение.** Функция на сфере в  $\mathbb{R}^m$  (в частности, на окружности, если  $m = 2$ ) называется *нечетной*, если ее значения в противоположных точках сферы противоположны:  $f(-x) = -f(x)$ .

Теореме Мёбиуса о точках перегиба соответствует такой «нечетный» вариант теоремы Гурвица типа Штурма.

**Теорема.** *Нечетная вещественная функция на окружности, ортогональная синусу и косинусу аргумента, имеет на окружности не менее шести нулей.*

*Доказательство.* В ряд Фурье нечетной функции входят лишь нечетные гармоники. Поэтому первая из гармоник, входящих в ряд с ненулевым коэффициентом, — третья или более высокая. Теорема Гурвица доставляет требуемые шесть нулей.

**Замечание.** Если нечетная вещественная функция на окружности ортогональна первым  $2n$  нечетным гармоникам

$$\sin t, \cos t, \dots, \sin(2n-1)t, \cos(2n-1)t,$$

то число нулей на окружности не меньше  $4n + 2$  (а на проективной прямой  $S^1/\pm 1$  — не меньше чем  $2n + 1$ ).

Теперь обратимся к многомерному случаю.

Пусть  $f: S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  — нечетная функция на единичной сфере в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Мы сопоставим этой функции волновой

фронт (который на самом деле есть не что иное, как поверхность, двойственная определенному функции  $f$  малому возмущению проективной гиперплоскости  $\mathbb{R}P^{m-1}$  в  $\mathbb{R}P^m$ : смысл функции  $f$  — это нормальная вариация проективной гиперплоскости).

**Определение.** Волновым фронтом функции  $f$  называется образ единичной сферы  $S^{m-1}$  при отображении  $\text{grad } F$ , где  $F$  — однородная функция степени 1 в  $\mathbb{R}^m$ , совпадающая с  $f$  на сфере радиуса 1.

**Замечание.** Функция  $F$  удовлетворяет условию однородности степени 1:  $F(cx) = cF(x)$  при всех вещественных  $c$  (не обязательно положительных), так как функция  $f$  нечетна.

**Замечание.** Фронт является образом всего пространства  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  при отображении  $\text{grad } F$ , так как градиент однородной степени один функции постоянен вдоль выходящей из начала координат прямой. Фронт можно также рассматривать как образ не сферы, а проективного пространства  $\mathbb{R}P^{m-1} = S^{m-1} / \pm 1$  (так как значения градиента в противоположных точках сферы одинаковы).

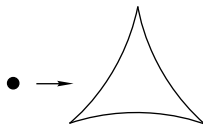


Рис. 4.11. Типичная деформация некоординированного точечного волнового фронта на плоскости

**Пример.** При  $m = 2$ ,  $f = \cos 3t$  ( $t$  — полярный угол на окружности) фронтом оказывается гипоциклоида с тремя острями. Она проходит целиком, уже когда  $t$  пробегает отрезок от 0 до  $\pi$  (рис. 4.11).

**Замечание.** Разложим  $f$  в ряд по сферическим гармоникам:  $f = f_1 + f_3 + f_5 + \dots$ . Первый член ряда  $f_1$  соответствует линейной однородной функции  $F_1$ , градиент которой постоянен. Поэтому изменение  $f_1$  приводит всего лишь к перемещению фронта в  $\mathbb{R}^m$  как целого и не влияет на число и расположение его особенностей. Мы можем поэтому предполагать с самого начала, что ряд по сферическим гармоникам начинается с членов степени 3:  $f = f_3 + f_5 + \dots$

Если старшие гармоники отсутствуют, то вопрос сводится к теореме Б. Сегре.

**Теорема.** Волновой фронт в  $\mathbb{R}^3$ , соответствующий кубической гармонике  $f_3$  (ограничению гармонического многочлена третьей степени общего положения от трех переменных на сферу  $S^2$ ), имеет четыре ребра возврата и шесть ласточкиных хвостов.

Д. Панов [20] доказал, что, добавляя высшие гармоники, можно добиться лишь одной компоненты ребра возврата фронта. Однако

в его примере фронт имеет большое число (двенадцать) ласточкиных хвостов.

Продолжая аналогию с теоремой Гурвица типа Штурма, естественно рассмотреть случай, когда третьи гармоники отсутствуют, так что ряд начинается прямо с пятых гармоник.

Численные эксперименты Ф. Аикарди обнаружили волновые фронты, соответствующие сферической функции  $f_5$  степени 5 с (не менее чем) восемью ребрами возврата и четырнадцатью ласточкиными хвостами.

**Гипотеза (Аикарди).** *Если нечетная вещественная функция  $f$  общего положения ортогональна всем кубическим гармоникам, то соответствующий ей волновой фронт в  $\mathbb{R}^3$  имеет не менее чем восемь ребер возврата и не менее чем четырнадцать ласточкиных хвостов.*

Смысл обеих гипотез состоит в экономии сложности: топологическая сложность простейших алгебраических представителей изучаемых объектов предполагается минимальной по сравнению со всеми другими представителями.

Общее положение об экономии сложности подтверждается многочисленными примерами в разных областях математики. Например, «гипотеза Тома» (недавно доказанная Кронхаймером и Мрувкой на основе работ Дональдсона и Виттена с Зейбергом) утверждает, что неособая алгебраическая кривая в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  имеет минимальный род по сравнению со всеми гладкими поверхностями, реализующими тот же класс двумерных гомологий.

Кронхаймер и Мрувка доказали также гипотезу Милнора о минимальности алгебраической реализации развязывания узла. Рассмотрим локально неприводимую комплексную (скажем, алгебраическую) кривую  $f(z, w) = 0$  в  $\mathbb{C}^2$  с особой точкой 0. Узел кривой определяется как пересечение комплексной кривой с малой трехмерной сферой  $S^3$  в  $\mathbb{C}^2$  с центром 0.

Гордиевым числом узла называется минимальное число самопересечений, через которые надо пройти, чтобы развязать узел. Это топологический инвариант узла.

Милнор определил чисто алгебраический инвариант особенности (считающий число двойных точек малого шевеления локального отображения  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , образом которого является кривая). Гордиево число не меньше инварианта Милнора, так как алгебраические шевеления тоже являются развязываниями.

Оказывается, эта оценка точна, т. е. сложность развязываний не алгебраического происхождения может быть только большей, чем сложность, достигающаяся при алгебраической реализации развязывания.

Конечно, эти примеры подтверждения общего принципа экономии сложности при алгебраической реализации отнюдь не доказывают ни его справедливость в сколько-нибудь общей ситуации, ни справедливость сформулированных выше гипотез. Но для них, во всяком случае, не найдены опровергающие примеры.

**Замечание.** Разобьем проективное пространство на большой шар и тонкую окрестность «бесконечно удаленной» проективной плоскости. Наша возмущенная поверхность разобьется на большой диск и тонкий лист Мёбиуса (вблизи бесконечности).

Зафиксируем какое-либо шевеление общего положения нашей проективной плоскости в окрестности прямой на бесконечности и будем менять возмущение диска. Тогда первая гипотеза Аикарди превращается в утверждение о параболических кривых и асимптотических направлениях на диске, вложенном в евклидово трехмерное пространство (с заданными граничными условиями). Более того, этот возмущенный диск можно считать графиком функции (если вся наша поверхность — возмущение плоскости).

Таким образом, первая гипотеза Аикарди содержит множество гипотез типа принципа максимума для функций двух переменных (в зависимости от того, какое именно возмущение выбрано вблизи бесконечности).

Опровержение любого из этих следствий опровергло бы саму гипотезу.

Точно так же, зафиксировав возмущение диска, мы получаем гипотезы о вложениях листа Мёбиуса, которые можно сформулировать в терминах функций (или мёбиусовских функций) на окружности. Опровержение любой из получающихся (при разных выборах деформации диска) гипотез типа теории Штурма опровергло бы и исходную гипотезу.

Все приведенные выше примеры показывают, что в теории топологически необходимых особенностей волновых фронтов самые абстрактные математические конструкции переплетаются с компьютерным экспериментированием, а самые «чистые» области математики — с самыми «прикладными» совершенно неразделимым образом.

# Литература

- [1] Анисов С. С. Выпуклые кривые в  $\mathbb{R}P^n$  // Труды МИРАН. 1998. Т. 212. С. 6–47.
- [2] Арнольд В. И. Комментарии к работе А. Пуанкаре «Об одной геометрической теореме». В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972. С. 987–989.
- [3] Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29(2). С. 243–244.
- [4] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14(4). С. 8–17.
- [5] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41(6). С. 3–18.
- [6] Арнольд В. И. Разветвленное накрытие  $\mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность и проективная топология // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29(5). С. 36–47.
- [7] Арнольд В. И. О топологических свойствах лежандровых проекций в контактной геометрии волновых фронтов // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6(3). С. 1–16.
- [8] Арнольд В. И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50(1). С. 3–68.
- [9] Арнольд В. И. Инварианты и перестройки фронтов на плоскости // Труды МИРАН. 1995. Т. 209. С. 14–64.
- [10] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер // Функц. анализ и его прилож. 1996. Т. 30(1). С. 1–17.
- [11] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984. С. 64–66.
- [12] Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1933. гл. 6.

- [13] *Глуцюз А. А.* Аналог теоремы Кэли для циклически-симметричных связанных графов // *Успехи матем. наук.* 1993. Т. 48(2). С. 233–234.
- [14] *Горюнов В. В.* Геометрия бифуркационных диаграмм простых проекции напрямую // *Функц. анализ и его прилож.* 1981. Т. 15(2). С. 77–82.
- [15] *Дэвис Ч.* Свойства отображений некоторых чебышёвских систем // *Докл. АН СССР.* 1958. Т. 175(2). С. 280–283.
- [16] *Закалюкин В. М.* Страт Максвелла лагранжева коллапса. В кн.: *Локальные и глобальные задачи теории обобщенности* // *Труды МИРАН.* 1998. Т. 221. С. 197–212.
- [17] *Здравковска С.* Топологическая классификация полиномиальных отображений // *Успехи матем. наук.* 1970. Т. 25(4). С. 179–180.
- [18] *Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А.* Симплектические листы скобок Гельфанда—Дикого и гомотопические классы невырожденных кривых // *Функц. анализ и его прилож.* 1990. Т. 24(1). С. 62–69.
- [19] *Панов Д. А.* Затыгиваемые кривые и теорема Мёбиуса о трех точках перегиба // *Функц. анализ и его прилож.* 1998. Т. 32(1). С. 29–39.
- [20] *Панов Д. А.* Параболические кривые и градиентные отображения // *Труды МИРАН.* 1998. Т. 212. С. 271–288.
- [21] *Седых В. Д.* Связь лагранжевых особенностей с лежандровыми при стереографической проекции // *Матем. сб.* 1994. Т. 185(12). С. 123–130.
- [22] *Табачников С. Л.* Вычисление инварианта Беннекена лежандровой кривой по геометрии ее фронта // *Функц. анализ и его прилож.* 1988. Т. 22(3). С. 89–90.
- [23] *Табачников С. Л.* Вокруг четырех вершин // *Успехи матем. наук.* 1990. Т. 45(1). С. 229–230.
- [24] *Чеканов Ю. В.* Лежандрова теория Морса // *Успехи матем. наук.* 1987. Т. 42(4). С. 139–141.
- [25] *Чеканов Ю. В.* Критические точки квазифункций и производящие семейства лежандровых многообразий // *Функц. анализ и его прилож.* 1996. Т. 30(2). С. 56–69.
- [26] *Шумакович А.* Явные формулы для странности плоской кривой // *Алгебра и анализ.* 1995. Т. 7. С. 165–199.
- [27] *Agrachev A.* Methods of control theory in nonholonomic geometry. In: *Proc. ICM Zürich. V. 2.* Basel: Birkhauser, 1995. P. 1473–1483.

- [28] *Aicardi F.* Classification and invariants of tree-like curves. In: Singularities and Bifurcations. Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 1–21. (Adv. Sov. Math., 21.)
- [29] *Aicardi F.* Appendix in: Arnol'd V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In: Singularities and Bifurcations. Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 84–91. (Adv. Sov. Math., 21.)
- [30] *Aicardi F.* Topological invariants of knots and framed knots in the solid torus // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 1995. V. 321. P. 81–86.
- [31] *Aicardi F.* Topological invariants of Legendrian curves // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 1995. V. 321. P. 199–204.
- [32] *Aicardi F.* Invariant polynomial of framed knots in the solid torus and its application to wave fronts and Legendrian knots // J. Knot Theory Ramifications. 1996. V. 5(6). P. 743–778.
- [33] *Aicardi F.* Discriminants and local invariants of planar fronts. In: Arnol'd—Gel'fand Mathematical Seminars. Geometry and Singularity Theory. Ed. by V. I. Arnol'd, I. M. Gel'fand, V. S. Retakh and M. S. Smirnov. Boston, MA: Birkhauser, 1997. P. 1–76.
- [34] *Anisov S.* Projective convex curves. In: Geometry and Singularity Theory. Ed. by V. I. Arnol'd, I. M. Gel'fand, V. S. Retakh and M. S. Smirnov. Boston, MA-Basel: Birkhäuser. 1997. P. 93–99.
- [35] *Arnol'd V. I.* Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mecanique classique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. V. 261(19). P. 3719–3722.  
Русский перевод: *Арнольд В. И.* Об одном топологическом свойстве глобально канонических отображений классической механики. В кн: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М.: ФАЗИС, 1997. С. 81–86.
- [36] *Arnol'd V. I.* Bernoulli—Euler updown numbers associated with functions singularities, their combinatorics and arithmetics // Duke Math. J. 1991. V. 63(2). P. 537–555.
- [37] *Arnol'd V. I.* Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In: Singularities and Bifurcations. Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 33–91. (Adv. Sov. Math., 21.)
- [38] *Arnol'd V. I.* The Vassiliev theory of discriminants and knots. In: Proc. First European Congress of Mathematicians (Paris, July 1992). Basel; Birkhauser, 1994. P. 3–29. (Progr. Math., 119.)
- [39] *Arnol'd V. I.* Topological invariants of plane curves and caustics // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. (Univ. Lect. Ser., 5.)



- [40] *Arnol'd V. I.* Sur les propriétés topologiques des projections Lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques // *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 1995. V. 8(1). P. 109–119.  
Русский перевод: *Арнольд В. И.* О топологических свойствах лагранжевых проекций и симплектической геометрии каустик. В кн.: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М.: ФАЗИС, 1997. С. 525–532.
- [41] *Arnol'd V. I.* On the number of flattening points of space curves. In: *Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems* // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1996. P. 11–22. (AMS Transl., Ser. 2, 171; Adv. Math. Sci., 28.)
- [42] *Arnol'd V. I.* Remarks on the enumeration of plane curves. In: *Topology of real algebraic varieties and related topics* // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1996. P. 17–32. (AMS Transl., Ser. 2, 173; Adv. Math. Sci., 29.)
- [43] *Arnol'd V. I.* Remarks on the extatic points of plane curves. In: *The Gel'fand Mathematical Seminars 1993–1995*. Boston, MA: Birkhäuser, 1996. P. 11–22.  
Русский перевод: *Арнольд В. И.* Замечания об экстатических точках плоских кривых. В кн.: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М.: ФАЗИС, 1997. С. 605–618.
- [44] *Atiyah M.* New invariants of 3- and 4-dimensional manifolds. In: *The Mathematical Heritage of Hermann Weyl* (Durham, NC, 1987) // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1988. P. 285–299. (Proc. Symp. Pure Math., 48.)
- [45] *Bennequin D.* Entrelacements et equation de Pfaff // *Astérisque*. 1983. V. 107–108. P. 87–162.
- [46] *Braunmühl A. V.* Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf Dreiaxigen Flächenen Zeiten Grades // *Math. Ann.* 1882. V. 20. P. 557–586.
- [47] *Chaperon M.* Quelques questions de géométrie symplectique (d'après, entre autres, Poincaré, Arnol'd, Conley et Zehnder) // *Asterisque*. 1983. V. 105–106. P. 231–249,
- [48] *Chaperon M.* On generating families. In: *The Floer Memorial Volume*. Basel: Birkhauser, 1995. P. 283–296. (Progr. Math., 133.)
- [49] *Chmutov S., Duzhin S.* Explicit formulas for Arnol'd's curve invariants. In: *Arnol'd—Gel'fand Mathematical Seminars. Geometry and Singularity Theory*. Ed. by V. I. Arnol'd, I. M. Gel'fand, V. S. Retakh and M. S. Smirnov. Boston, MA: Birkhauser, 1997. P. 123–138.
- [50] *Chmutov S. V., Goryunov V. V.* Kauffman bracket of plane curves // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 182. P. 83–103.

- 
- [51] *Chmutov S., Goryunov V., Murakami H.* Regular Legendrian knots and the HOMFLY polynomial of immersed plane curves // *Math. Ann.* 2000. V. 317(3). P. 389–413.
- [52] *Conley C, Zehnder E.* The Birkhoff—Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd // *Invent. Math.* 1983. V. 73. P. 33–49.
- [53] *Davis C.* Extrema of a polynomial // *Amer. Math. Monthly.* 1957. V. 64. P. 679–680.
- [54] *Ferrand E.* On the Bennequin invariant and the geometry of wave fronts // *Geom. Dedicata.* 1997. V. 65(2). P. 219–245.
- [55] *Floer A.* Proof of the Arnol'd conjecture and generalizations to certain Kahler manifolds // *Duke Math. J.* 1986. V. 53. P. 1–32.
- [56] *Floer A.* An instanton invariant for 3-manifolds // *Comm. Math. Phys.* 1988. V. 118(2). P. 215–240.
- [57] *Floer A.* Morse theory and Lagrangian intersections // *J. Diff. Geom.* 1988. V. 28. P. 513–547.
- [58] *Floer A.* Symplectic fixed points and holomorphic spheres // *Comm. Math. Phys.* 1989. V. 120. P. 576–611.
- [59] *Floer A., Hofer H.* Symplectic homology // *I. Math. Z.* 1994. V. 215. P. 37–88.
- [60] *Fuchs D., Tabachnikov S.* Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space // *Topology.* 1997. V. 36(5). P. 1025–1053.
- [61] *Givental' A. B.* Nonlinear generalization of the Maslov index. In: *Theory of Singularities and Its Applications.* Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1990. P. 71–103. (Adv. Sov. Math., 1.)
- [62] *Givental' A. B.* A symplectic fixed point theorem for toric manifolds. In: *The Floer Memorial Volume.* Basel: Birkhäuser, 1995. P. 445–481. (Progr. Math., 133.)
- [63] *Goryunov V. V.* Subprincipal Springer cones and modifications of Laurent polynomials and  $D_\mu$  singularities. In: *Singularities and Bifurcations.* Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 163–188. (Adv. Sov. Math., 21.)
- [64] *Gromov M.* Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds // *Invent. Math.* 1985. V. 82. P. 307–347.
- [65] *Gromov M.* Partial differential relations. Berlin—New York: Springer-Verlag, 1986. Русский перевод: *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
- [66] *Guieu L., Mourre E., Ovsienko V. Yu.* Theorem on six vertices of a plane curve via Sturm theory. In: *Geometry and Singularity The-*

- ory. Ed. by V. I. Arnol'd, I. M. Gel'fand, V. S. Retakh and M. S. Smirnov. Boston, MA-Basel: Birkhäuser, 1997. P. 257–266.
- [67] *Gusein-Zade S. M., Natanson S. M.* Arf invariant and Arnol'd invariant. In: *Geometry and Singularity Theory*. Ed. by V. I. Arnol'd, I. M. Gel'fand, V. S. Retakh and M. S. Smirnov. Boston, MA-Basel: Birkhäuser, 1997. P. 267–280.
- [68] *Hurwitz A.* Über die Fourieschen Konstanten integrierbarer Funktionen // *Math. Ann.* 1903. V. 57. P. 425–446.
- [69] *Jacobi C. G. J.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: G. Reiner, 1884. Русский перевод: *Якоби К. Г. Я.* Лекции по динамике. Л.—М.: ОНТИ, 1936.
- [70] *Kazarian M.* Nonlinear version of Arnol'd's theorem on flattening points // *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I.* 1996. V. 323(1). P. 63–68.
- [71] *Kellogg O.* The oscillation of functions on an orthogonal set // *Amer. J. Math.* 1916. V. 38. P. 1–5.
- [72] *Kontsevich M.* Formal (non)commutative symplectic geometry. In: *The Gel'fand Mathematical Seminar. 1990–1992*. Ed. by L. Corwin, I. Gel'fand and J. Lepowski. Boston, MA: Birkhäuser, 1993. P. 173–187.
- [73] *Laudenbach F., Sikorav J. C.* Persistence d'intérsection avec la section nulle an course d'une isotopie hamiltonienne dans le fibre cotangent // *Invent. Math.* 1985. V. 82(2). P. 349–358.
- [74] *Lin X. S., Wang Z.* Integral geometry of plane curves and knot invariants // *J. Diff. Geom.* 1996. V. 44(1). P. 74–95.
- [75] *Looijenga E.* The complement of the bifurcation variety of a simple singularity // *Invent. Math.* 1974. V. 23. P. 105–116.
- [76] *Mikhalkin G., Polyak M.* Whitney formula in higher dimensions // *J. Diff. Geom.* 1996. V. 44(3). P. 583–594.
- [77] *Möbius A. F.* Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung // *Abh. Kön. Sächs. Gess. Wiss., Math.-Phys. Klasse.* 1852. V. 1. P. 1–82, § 10; *Gesammelte Werke*, V. 2. Wiesbaden, 1896. p. 99.
- [78] *Ono K.* On the Arnol'd conjecture for weakly monotone symplectic manifolds // *Invent. Math.* 1995. V. 119. P. 519–536.
- [79] *Ovsienko V., Tabachnikov S.* Sturm Theory, Ghys theorem on zeroes of the Schwarzian derivative and flattening of Legendrian curves // *Selecta Math.* 1996. V. 2. P. 297–307.
- [80] *Polyak M.* On the Bennequin invariant of Legendrian curves and its quantization // *C. R. Acad. Sci. Palis, Sér. I.* 1996. V. 322(1). P. 77–82.
- [81] *Polyak M.* Invariants of plane curves and fronts via Gauss diagrams // *Topology.* 1998. V. 37(5). P. 989–1009.

- 
- [82] *Segre B.* The Non-singular Cubic Surfaces. Oxford: Clarendon Press, 1942.
- [83] *Shapiro B.* Discriminants of convex curves are homeomorphic // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126(7). P. 1923–1930.
- [84] *Shapiro B. Z., Shapiro M. Z.* On the number of connected components in the space of closed nondegenerate curves on  $S^n$  // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. V. 25(1). P. 75–80.
- [85] *Smale S.* A classification of immersions of the two-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. V. 90. P. 281–290.
- [86] *Sturm J. C. F.* Mémoire sur les équations différentielles du second ordre // J. Math. Pures Appl. 1836. V. 1. P. 106–186.
- [87] *Tabachnikov S.* Invariants of smooth triple point free plane curves // J. Knot Theory Ramifications. 1996. V. 5(4). P. 531–552.
- [88] *Thorn R.* L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynôme // Topology, 1965. V. 3. P. 297–307.
- [89] *Uribe-Vargas R.* On the higher dimensional four-vertex theorem // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. 1995. V. 321. P. 1353–1358.
- [90] *Vassiliev V. A.* Cohomology of knot spaces. In: Theory of Singularities and its Applications. Ed. by V. I. Arnol'd // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1990. P. 23–70. (Adv. Sov. Math., 1.)
- [91] *Viro O.* Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real algebraic curves. In: Topology of Real Algebraic Varieties and Related Topics // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1996. P. 231–252. (AMS Transl., Ser. 2, 173.)
- [92] *Weinstein A.* Lectures on Symplectic Manifolds // Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1977. (CBMS Regional Conf. Ser. Math., 29.)
- [93] *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 276–284.
- [94] *Yu J., Zhou J., Pan J.* Extremal values of the basic invariants of plane curves // J. Knot Theory Ramifications. 2000. V. 9(8). P. 1085–1126.
- [95] *Zhou J., Zou J., Pan J.* The basic invariants of long curve and closed curve perestroikas // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7(4). P. 527–548.